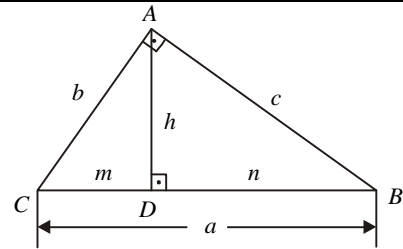


Geometria Plana

1. Triângulo

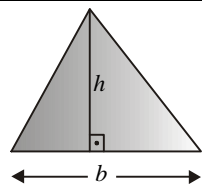
Relações métricas em um triângulo retângulo



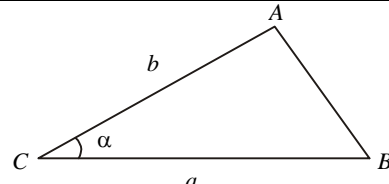
Em um triângulo retângulo qualquer:

- * $a^2 = b^2 + c^2$
- * $b^2 = ma$
- * $c^2 = na$
- * $h^2 = mn$
- * $ah = bc$

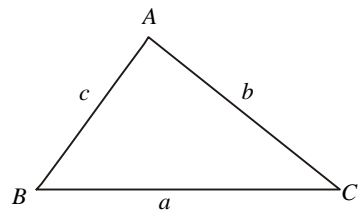
• Área de um triângulo



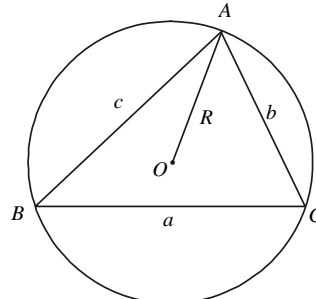
$$S = \frac{bh}{2}$$



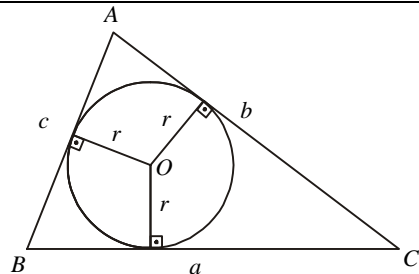
$$S = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2}$$



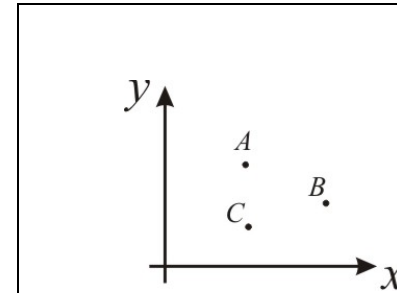
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$



$$S = \frac{abc}{4R}$$



$$S = pr, \quad \text{em que } p = \frac{a+b+c}{2}$$

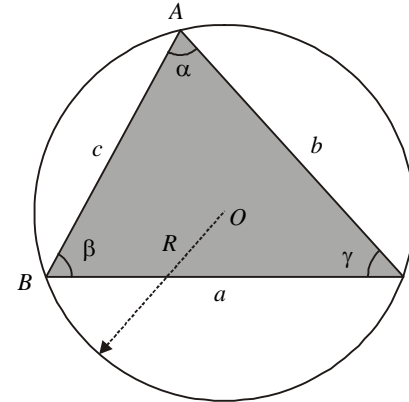


Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos de um plano cartesiano. Sendo D o determinante obtido por

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{tem-se que:}$$

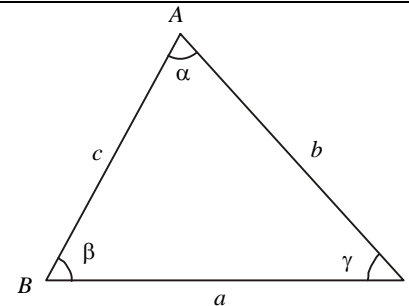
- * $D = 0 \Leftrightarrow A, B$ e C são colineares;
- * $D \neq 0 \Leftrightarrow A, B$ e C são vértices de um triângulo cuja área S é dada por: $S = \frac{1}{2}|D|$

• Teorema dos senos (ou lei dos senos)



$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$$

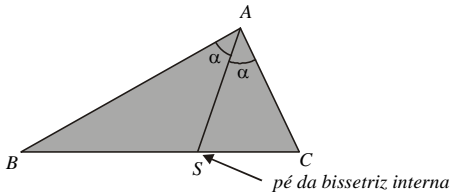
• Teorema dos cossenos (ou lei dos cossenos)



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned}$$

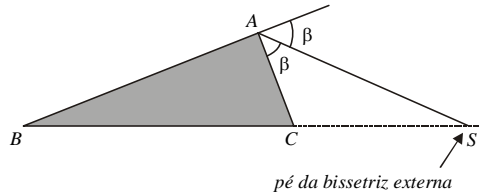
• Teorema da bissetriz

Interna



$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$

Externa

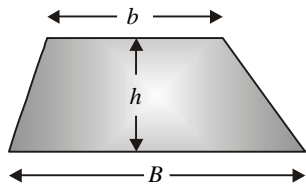


$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$

2. Quadriláteros

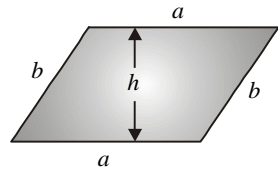
• Áreas dos quadriláteros notáveis

Trapézio



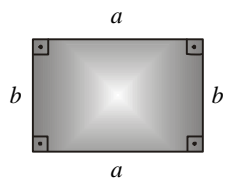
$$S = \frac{(B+b)h}{2}$$

Paralelogramo



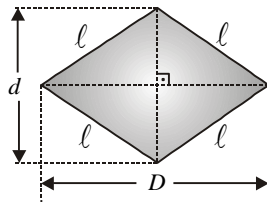
$$S = a \cdot h$$

Retângulo



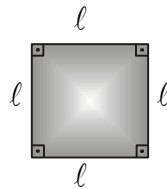
$$S = a \cdot b$$

Losango



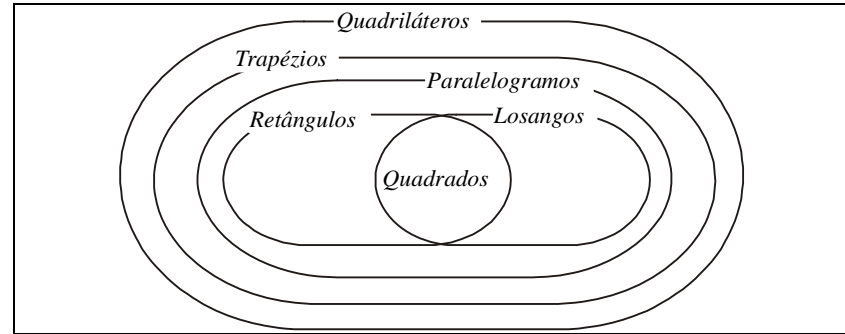
$$S = \frac{d \cdot D}{2}$$

Quadrado

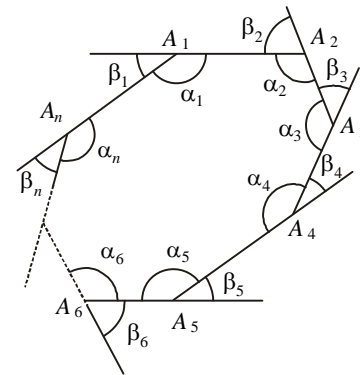


$$S = l^2$$

Diagrama de inclusão dos quadriláteros



3. Polígonos



Em um polígono convexo de n lados:

- * o número de diagonais é $d = \frac{n(n-3)}{2}$
- * a soma dos ângulos internos é $S_i = (n-2)180^\circ$
- * a soma dos ângulos externos é $S_e = 360^\circ$

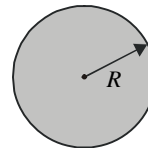
Em um polígono regular de n lados:

- * cada ângulo interno é $\alpha = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$
- * cada ângulo externo é $\beta = \frac{S_e}{n} = \frac{360^\circ}{n}$

4. Círculo

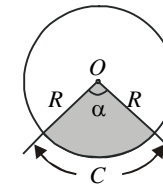
• Áreas das partes do círculo

Círculo



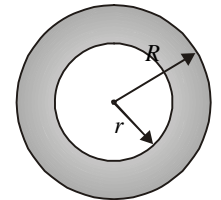
- * $S = \pi R^2$
- * $C = 2\pi R$

Sector circular



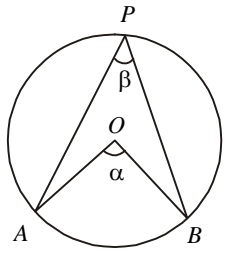
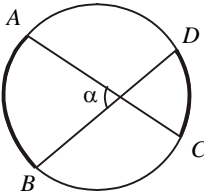
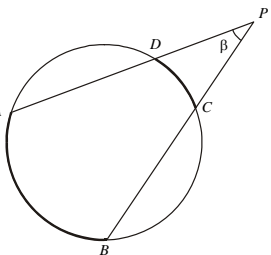
$$S = \frac{CR}{2} = \frac{\alpha R^2}{2}, \alpha \text{ em radianos}$$

Coroa circular

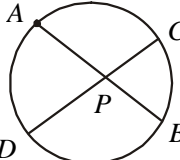
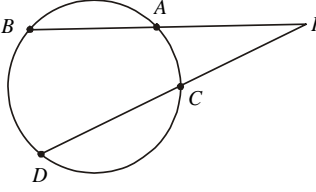
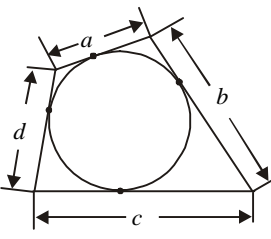


$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

• **Ângulos em um círculo**

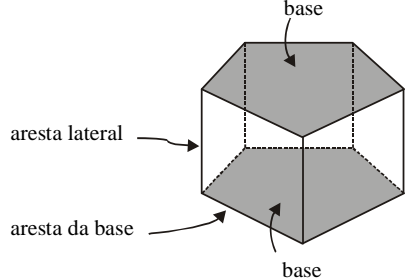
<p>Ângulo central (α) e ângulo inscrito (β)</p>  <p>$\alpha = 2\beta = med(\widehat{AB})$</p>	<p>Ângulo excêntrico interior</p>  <p>$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$</p>	<p>Ângulo excêntrico exterior</p>  <p>$\beta = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$</p>
---	---	---

• **Potência de um ponto P em relação a uma circunferência**

<p>P é interno</p>  <p>$(PA)(PB) = (PC)(PD)$</p>	<p>P é externo</p>  <p>$(PA)(PB) = (PC)(PD)$</p>	<p>Consequência importante</p>  <p>$a + c = b + d$</p>
---	---	---

Geometria Espacial

1. Prisma

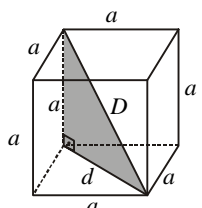


Em um prisma qualquer:

- * o volume é $V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$
- * a área lateral (A_l) é a soma das áreas das faces laterais
- * a área da base (A_B) é a área de apenas uma base
- * a área total é $A_T = 2A_B + A_l$

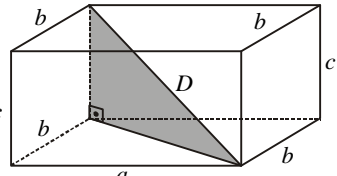
• Prismas particulares

Cubo



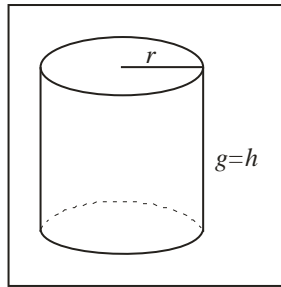
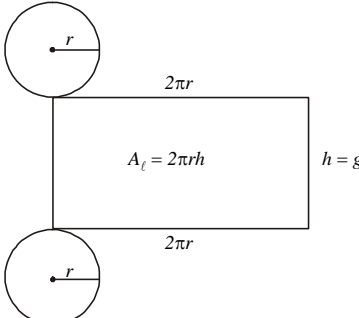
- * Área da base: $A_B = a^2$
- * Área lateral: $A_l = 4a^2$
- * Área total: $A_T = 6a^2$
- * Diagonal de uma face: $d = a\sqrt{2}$
- * Diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$
- * Volume: $V = a^3$

Paralelepípedo reto-retângulo



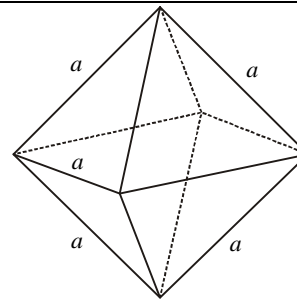
- * Soma das dimensões: $a + b + c$
- * Soma das arestas: $4a + 4b + 4c$
- * Área total: $A_T = 2(ab + ac + bc)$
- * Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- * Volume: $V = abc$
- * Relação importante: $(a + b + c)^2 = D^2 + A_T$

2. Cilindro circular reto

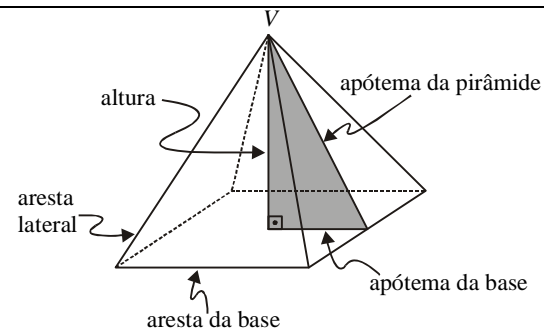
- * Área da base: $A_B = \pi r^2$
- * Área total: $A_T = 2\pi r(r + h)$
- * Volume: $V = A_B h = \pi r^2 h$

* Área lateral: $A_\ell = 2\pi rh$



* Diagonal: $d = a\sqrt{2}$

3. Pirâmide

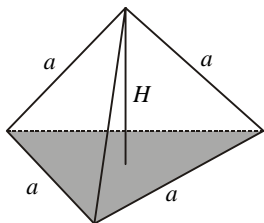


Em uma pirâmide qualquer:

- * o volume é $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$
- * a área lateral (A_ℓ) é a soma das áreas das faces laterais
- * a área total (A_T) é $A_T = A_B + A_\ell$

• Sólidos importantes

Tetraedro regular

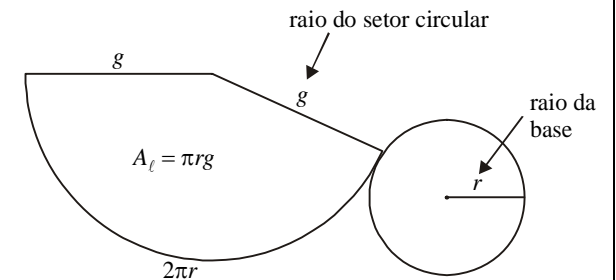
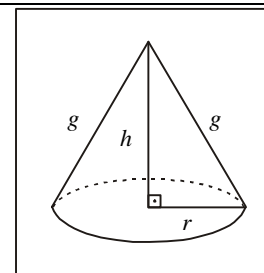


- * Área da base: $A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- * Área lateral: $A_\ell = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$
- * Área total: $A_T = a^2\sqrt{3}$
- * Altura: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
- * Volume: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Octaedro regular

- * Área total: $A_T = 2a^2\sqrt{3}$
- * Volume: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

4. Cone circular reto

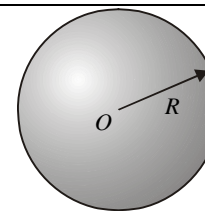


Em qualquer cone circular reto:

- * $g^2 = h^2 + r^2$
- * a área da base é $A_B = \pi r^2$

- * a área lateral é $A_\ell = \pi r g$
- * a área total é $A_T = \pi r(r + g)$
- * o volume é $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

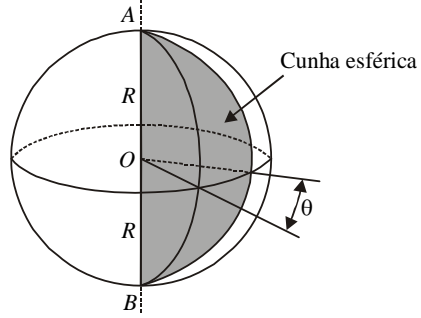
5. Esfera



- * Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$
- * Volume da esfera: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

• Partes da esfera

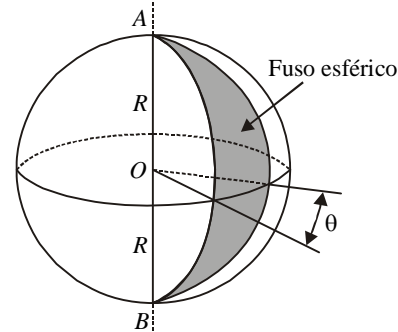
Cunha esférica



$$2\pi \sim \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V = \frac{2\theta R^3}{3},$$

$\theta \sim S$ (volume da cunha)
 θ em radianos

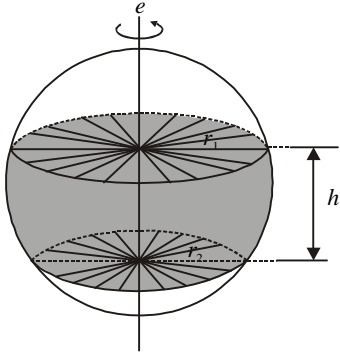
Fuso esférico



$$2\pi \sim 4\pi R^2 \Rightarrow S = 2\theta R^2,$$

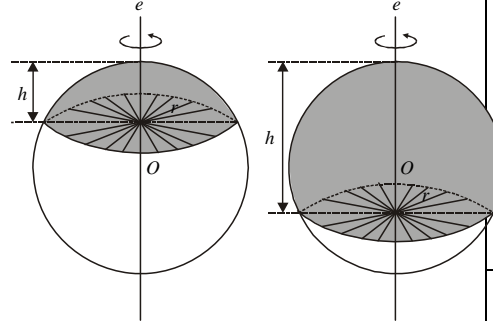
$\theta \sim S$ (área do fuso)
 θ em radianos

Segmento esférico de duas bases



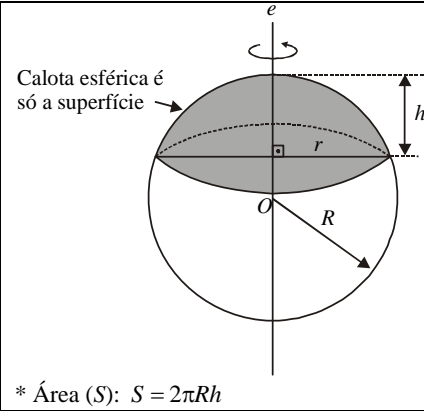
* Volume (V): $V = \frac{\pi h}{6} [3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$
 * Área (S): $S = 2\pi R h + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

Segmento esférico de uma base

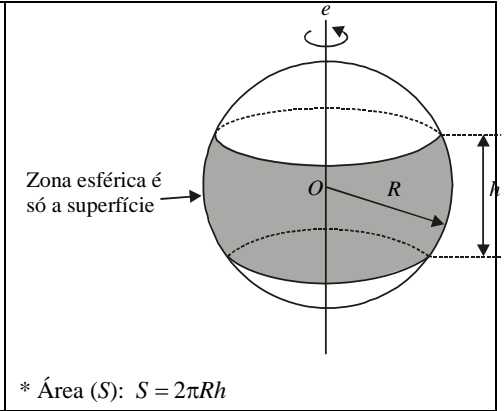


* Volume (V): $V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2)$
 * Área (S): $S = 2\pi R h + \pi r^2$

Calota esférica

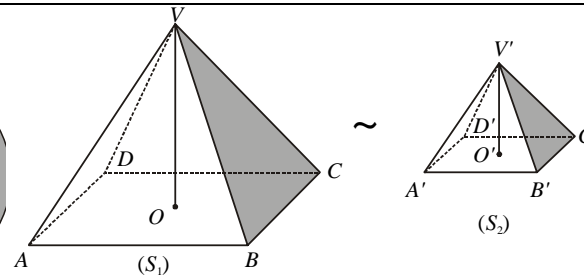


* Área (S): $S = 2\pi R h$



* Área (S): $S = 2\pi R h$

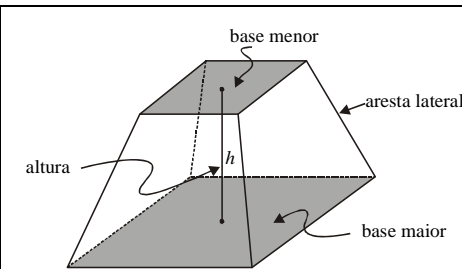
6. Razão de semelhança de dois sólidos



Quando dois sólidos S_1 e S_2 (como os da figura) são semelhantes de razão linear k

- * a razão entre dois elementos lineares quaisquer é k
- * a razão entre as áreas correspondentes é k^2
- * a razão entre os volumes é k^3

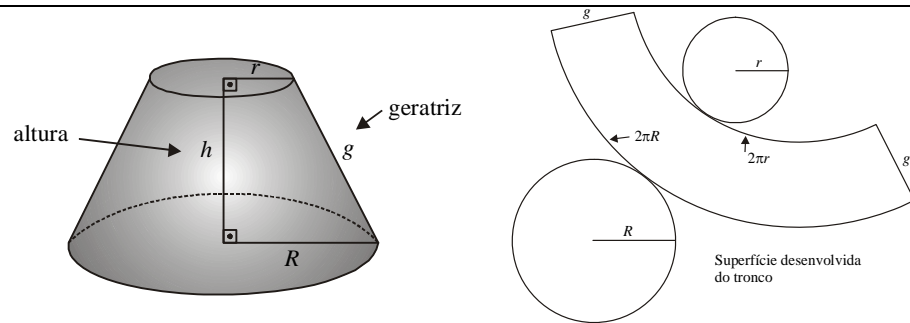
7. Tronco de pirâmide de bases paralelas



Sendo A_b a área da base menor, A_B a área da base maior, A_ℓ a área lateral, h a altura e V o volume do tronco, tem-se que:

- * a área lateral A_ℓ é a soma das áreas das faces laterais
- * a área total é $A_T = A_B + A_b + A_\ell$
- * o volume é $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b})$

8. Tronco cone de revolução de bases paralelas



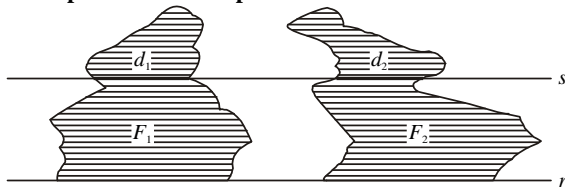
Sendo A_b a área da base menor, A_B a área da base maior, A_ℓ a área lateral, g a geratriz, h a altura e V o volume do tronco, tem-se que:

* $A_b = \pi r^2$
 * $A_B = \pi R^2$

* $A_\ell = \pi g(R + r)$
 * $A_T = A_B + A_b + A_\ell$
 * $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$

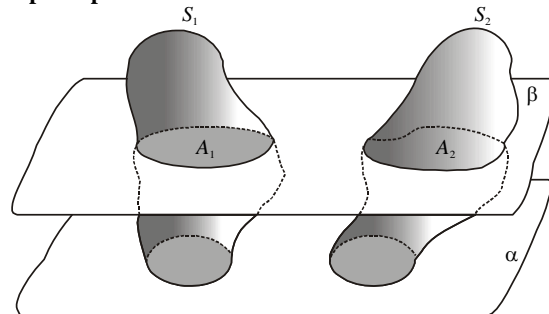
9. Princípio de Cavalieri

Princípio de Cavalieri para áreas



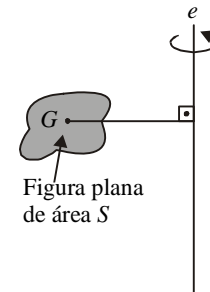
"Sejam F_1 e F_2 duas figuras planas apoiadas sobre uma mesma reta r . Se toda reta s , paralela a r , determina em F_1 e F_2 segmentos d_1 e d_2 congruentes (os segmentos d_1 e d_2 são as interseções da reta s como as figuras F_1 e F_2), então as figuras F_1 e F_2 são equivalentes (têm áreas iguais).

O princípio de Cavalieri



"Sejam S_1 e S_2 dois sólidos apoiados sobre um mesmo plano α . Se todo plano β , paralelo a α , secciona S_1 e S_2 segundo figuras planas equivalentes ($A_1 = A_2$), então os sólidos S_1 e S_2 têm volumes iguais."

10. Teorema de Pappus-Guldin

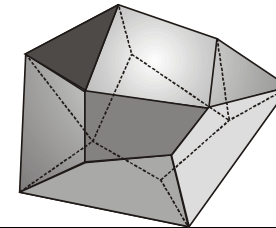


Seja S a área de uma figura plana. Ao girar essa figura plana (de 360°) em torno do eixo e , obtém-se um sólido de revolução. Demonstra-se que o volume desse sólido pode ser calculado pela fórmula $V = 2\pi dS$. Sendo G o centro de gravidade da figura, d é a distância do ponto G à reta e .

- * É vantagem aplicar a fórmula $V = 2\pi dS$ quando o centro de gravidade da figura é de fácil determinação.
- * Em qualquer triângulo, o centro de gravidade é o seu baricentro.
- * Em qualquer quadrado, losango ou paralelogramo, o centro de gravidade é a intersecção das suas diagonais.
- * Em qualquer polígono regular, o centro de gravidade é o centro da circunferência inscrita (ou circunscrita).

11. Poliedros

Poliedro convexo



Em um poliedro convexo com F faces, V vértices e A arestas:

- * $V - A + F = 2$
- * $S = (V - 2) 360^\circ$, em que S é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

Classificação

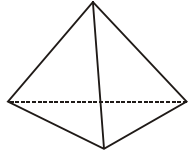
Poliedros de Platão (há apenas 5 poliedros de Platão):

- * tetraedros
- * hexaedros
- * octaedros
- * dodecaedros
- * icosaedros

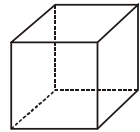
Um poliedro é de Platão somente se:

- 1º) todas as suas faces são polígonos com o mesmo número de lados;
- 2º) em cada um de seus vértices concorre o mesmo número de arestas;
- 3º) é Euleriano.

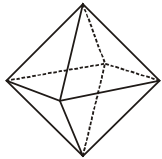
Poliedros Regulares



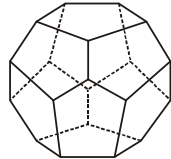
Tetraedro regular



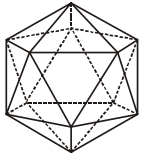
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular

Um poliedro é regular somente se:

- 1º) todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes
- 2º) possui todos os ângulos poliédricos congruentes

Observações importantes

- * São os poliedros de Platão com todas as faces formadas por polígonos regulares
- * "Todo poliedro regular é de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular."