MATERIAL

DE

MATEMÁTICA I

CAPÍTULO III

DERIVADA

Curso:
Administração

3 DERIVADA

3.1 Introdução

A **diferenciação** é uma técnica matemática que possui muitas aplicações, entre elas, destacam-se o traçado de curvas, os problemas de otimização de funções e a análise de taxas de variação. O ramo da matemática que estuda a derivada é conhecido como Cálculo.

Observemos um problema de taxa de variação de uma função:

- Se a função é linear (1º grau), sua taxa de variação em relação à variável independente é igual ao coeficiente angular da reta que representa a função no plano.

- Se a função não for linear, sua taxa de variação em relação à variável independente continua sendo a inclinação do gráfico mas, neste caso, ela é medida pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto considerado. Como o gráfico não é uma reta, essa taxa de variação passa a varia ponto a ponto.

Então, o ideal é conseguirmos calcular o coeficiente angular da tangente à curva em certo ponto dado. Lembre-se que, tangente à curva em um ponto é a reta que passa por este ponto e que indica a direção da curva.

Def. 1.1: Derivada *f ’(x)* exprime o coeficiente angular da reta tangente à curva *y = f(x)* em função da coordenada x do ponto de tangência. E podemos denotá-la das seguintes formas:

$$f'(x),\ y',\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{dy}{dx}$$

Uma função é dita diferenciável em $x = a$ se possui derivada neste ponto. Uma função que possui derivada em todos os pontos de seu domínio recebe o nome de função diferenciável. Os gráficos de funções diferenciáveis devem ser “suaves”, ou seja, não podem ter “vértices” nem “descontinuidade”.

3.2 TÉCNICAS DE DIFERENCIAÇÃO

3.2.1 Derivada de uma constante

Seja c $\in \Re$ (uma constante)

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

3.2.2 Derivada da Potência

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Ex. 1) Derive:

a) $y = x^2$

$y' = 2x^{2-1} = 2x$

b) $y = x^{10}$

$y' = 10\,x^{10-1} = 10\,x^9$

c) $y = \frac{1}{x^{10}} \Rightarrow y = x^{-10}$

$y' = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$

d) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{1/2}$

$y' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y = x^{-1/2}$

$y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} =$

$y' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

f) $y = x$

$y' = 1x^0 = 1$

3.2.3 Derivada da Constante Multiplicada

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

Ex. 2) Derive:

a) $y = 3x^5 \Rightarrow y' = 3.5x^4 \Rightarrow y' = 15x^4$

b) $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{4} \Rightarrow y' = \frac{x}{2}$

c) $y = \frac{2}{3x} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^{-1}$

$y' = \frac{2}{3}(-1)\,x^{-2} = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

3.2.4 Derivada da Soma ou da Diferença

$$\frac{d}{dx}(f + g) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f - g) = f'(x) - g'(x)$$

Ex. 3) Derive:

a) $y = 3x^2 - 5x$

$y' = 6x - 5$

b) $y = x^3 - 2x^2 + 3$

$y' = 3x^2 - 4x$

c) $y = \frac{x^{10}}{2} + \frac{2x^6}{3} - 3x + 4$

$y' = 5x^9 + 4x^5 - 3$

d) $y = \frac{3}{x} + \sqrt{x}$

$y' = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $y = \frac{3x-1}{2} + 2x^5$

$y' = \frac{3}{2} + 10x^4$

f) $y = 3x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{7}$

$y' = 6x - \frac{2}{3} + \frac{2}{x^3}$

g) $y = \frac{3}{2x^2} - \frac{3}{4\sqrt{x}}$

$y' = -\frac{3}{x^3} + \frac{3}{8\sqrt{x^3}}$

EXERCÍCIOS

1) Derive as funções abaixo:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

b) $y = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

c) $y = x^9 - 5x^8 + x + 12$

d) $y = \frac{x^8}{4} - \frac{x^6}{2} - x + 2$

e) $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{x} - \sqrt{x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{x}{7}$

f) $y = 3x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{5}{x} - \sqrt{5}$

g) $y = \frac{x^5}{2} - 3x^4 + \sqrt{x}$

h) $y = \frac{x+3}{2} - \frac{3}{x} + x^3$

i) $y = 12 - 3x^4 + 4x^6$

j) $y = 15 - x + 4x^2 - 5x^4$

k) $y = 6x^3 - 5x^2 + x + 9$

l) $y = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$

m) $y = 2x - \frac{1}{2x}$

n) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

o) $y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

p) $y = \frac{1}{20}x^3 - 5x^2 + 8x + 100$

q) $y = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x - 10$

r) $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 15}{10}$

s) $y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 7x + 1$

t) $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{4}x^{20} + \frac{1}{6}x^3$

RESPOSTAS

1 – a) $y' = 3x^2 - 6x$

b) $y' = 12x^3 - 12x^2 + 4x - 3$

c) $y' = 9x^8 - 40x^7 + 1$

d) $y' = 2x^7 - 3x^5 - 1$

e) $y' = -\frac{x}{2} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{7}$

f) $y' = 6x - \frac{2}{5} - \frac{5}{x^2}$

g) $y' = \frac{5x^4}{2} - 12x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

h) $y' = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2} + 3x^2$

i) $y' = -12x^3 + 24x^5$

j) $y' = -1 + 8x - 20x^3$

k) $y' = 18x^2 - 10x + 1$

l) $y' = 9x^2 - 4x + 4$

m) $y' = 2 + \frac{1}{2x^2}$

n) $y' = 2x - \frac{2}{x^3}$

o) $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$

p) $y' = \frac{3}{20}x^2 - 10x + 8$

q) $y' = 4x^3 - 9x^2 + 12x - 20$

r) $y' = \frac{4x^3 - 10x}{10}$

s) $y' = 4x^2 - \frac{4}{5}x + 7$

u) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x}} - 15x^{19} + \frac{1}{2}x^2$

3.2.5 Derivada da Potência (Regra da Cadeia)

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\, f'(x)\, [f(x)]^{n-1}.$$

Ex. Derive as funções abaixo:

a) $y = (2x + 1)^{10}$

$f = 2x + 1 \Rightarrow f' = 2$

$y' = 10.2.(2x + 1)^9$

$y' = 20(2x + 1)^9$

b) $y = \sqrt{5x - 3} \Rightarrow y = (5x - 3)^{1/2}$

$f = 5x - 3 \Rightarrow f' = 5$

$y' = \frac{1}{2}.5.(5x - 3)^{1 - 1/2}$

$y' = \frac{5}{2\sqrt{5x - 3}}$

EXERCÍCIOS

1 – Derive as funções abaixo:

1) $y = \frac{5}{3 - 2x}$

2) $y = \frac{x + 1}{x}$

3) $y = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

4) $y = (4 - x)^5$

5) $y = (x^2 - 2x)^8$

6) $y = \sqrt{2x + 3}$

7) $y = (2x^4 - x)^3$

8) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

9) $y = (x^5 - 4x^3 - 7)^8$

10) $y = (8x - 7)^{-5}$

11) $y = (x^4 - 4x^2 + 10)^4$

12) $y = (x^2 - 1)^{-3}$

13) $y = (8x^2 + 9)^2$

RESPOSTA

1) $y' = -\frac{10}{(3 - 2x)^2}$

2) $y' = -\frac{1}{x^2}$

3) $y' = \frac{-1 - 2x - 3x^2}{(1 + x + x^2 + x^3)^2}$

4) $y' = -5(4 - x)^4$

5) $y' = 8(2x - 2)(x^2 - 2x)^7$

6) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$

7) $y' = 3(8x^3 - 1)(2x^4 - x)^2$

8) $y' = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$

9) $y' = 8(5x^4 - 12x^2)(x^5 - 4x^3 - 7)^7$

10) $y' = -\frac{40}{(8x - 7)^6}$

11) $y' = 4(4x^3 - 16x)(x^4 - 4x^2 + 10)^3$

12) $y' = -\frac{6x}{(x^2 - 1)^4}$

13) $y' = 2(16x)(8x^2 + 9)$

3.3 Exercícios sobre <u>TAXA DE VARIAÇÃO</u>

1. Avalia-se que daqui a t anos, a circulação de um jornal local será dada pela função $C(t) = 100t^2 + 400t + 5.000$ exemplares.

a) Deduza a expressão da taxa de variação da circulação do jornal daqui a t anos.
b) Qual será a taxa de variação da circulação daqui a 5 anos? A circulação aumentará ou diminuirá?
c) Qual a percentagem de variação da circulação do jornal daqui a 5 anos?

2. Um estudo sobre a eficiência do turno da manhã de uma fábrica indica que um operário médio, chegando ao trabalho às 8 horas, monta $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ rádios.

a) Deduza a expressão da taxa à qual o operário montará os rádios após x horas de trabalho.
b) A que taxa o operário estará montando rádios às 9 horas da manhã?
c) Qual será o percentual de variação do número de rádios montados às 9 horas da manhã?

3. Certo estudo ambiental em uma comunidade urbana indicou que, daqui a t anos, o nível médio de monóxido de carbono no ar será de $Q(t) = 0,05t^2 + 0,1t + 3,4$ partes por milhão.

a) Daqui a 1 ano, qual será a taxa de variação, em relação ao tempo, do monóxido de carbono? E o percentual de variação?
b) Qual será a taxa de variação do monóxido de carbono este ano? E o percentual de variação?

4. Estima-se que, daqui a t anos, a população de uma certa comunidade suburbana será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares de habitantes.

a) Deduza a expressão da taxa de variação da população, em relação ao tempo, daqui a t anos.
b) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 1 ano?
c) Qual será a taxa de crescimento da população daqui a 9 anos?
d) O que você observa na taxa de crescimento populacional durante todo este tempo?

5. Estima-se que a produção semanal de uma certa indústria seja dada pela seguinte função $Q(x) = -x^2 + 2.100x$ unidades, onde x é o número de operários empregados.

a) Use análise marginal para estimar o efeito na produção semanal ao se empregar um operário adicional.
b) Estime o efeito na produção semanal ao empregar o 31º operário.
c) Qual a variação percentual da produção semanal ao empregar o 31º operário?

6. Suponha que o custo total de fabricação de q unidades de certo produto seja dado pela função $C(q) = 3q^2 + q + 500$ reais.
a) Use análise marginal para estimar o custo de fabricação da 41ª unidade
b) Qual a variação percentual do custo ao fabricar a 41ª unidade?

7. O ganho total mensal proveniente da fabricação de determinado produto é de $R(q) = 240q + 0{,}05q^2$ reais, onde q representa o número de unidades produzidas no mês. Atualmente, o fabricante produz 80 unidades por mês e pretende elevar este número, aumentado de uma unidade a produção mensal.
a) Use análise marginal para analisar o ganho adicional produzido pela produção e venda da 81ª unidade.
b) Qual a variação percentual do ganho ao fabricar e vender a 81ª unidade?

8. O lucro bruto anual de uma companhia é de $L(t) = 0{,}1t^2 + 10t + 20$ milhões, onde t representa o número de anos transcorridos desde a fundação da companhia, em 1990.
a) Qual foi a taxa de crescimento do lucro bruto da companhia, em relação ao tempo, em 1990?
b) Qual a porcentagem de crescimento do lucro bruto, em relação ao tempo, em 1999?

9. Calcula-se que, daqui a t anos, a população de determinada cidade será dada pela função $P(t) = t^2 + 200t + 10.000$ habitantes.
a) Expresse a taxa de variação da população em função do tempo.
b) Qual será a taxa de variação da população, em relação ao tempo, daqui a 10 anos?
c) Qual será a porcentagem de variação da população daqui a 10 anos?

3.4 Exercícios sobre Máximo e Mínimo de Funções em Intervalos Fechados

Para resolver problemas de máximo e mínimo quando a função está restrita a intervalos fechados, devemos:

1º) Calcular a derivada da função;
2º) Achar os pontos críticos (pontos onde a derivada vale zero ou a derivada não existe);
3º) Testar os pontos críticos e os extremos do intervalo: o maior valor será o máximo e o menor valor será o mínimo.

1. Calcule os pontos de máximo e mínimo absolutos nos intervalos especificados:
a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$; $2 \le x \le 4$
b) $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$; $0 \le x \le 3$

c) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$; $-3 \le x \le 0$

d) $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$; $-1 \le x \le 3$

2. Certa associação nacional de consumidores foi fundada em 1970. Suponha que, *x* anos após sua fundação, o número de membros desta associação seja dado pela função $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$.

d) Em que período entre 1970 e 1984 a associação teve mais membros? Quantos eram eles?

e) Em que período entre 1971 e 1984 a associação teve menos membros? Quantos eram eles?

3. Uma estação de rádio de uma cidade, que transmite apenas noticiários, realizou uma pesquisa sobre a preferência dos moradores do lugar. A pesquisa revelou que a percentagem da população adulta do local, que ouve a estação x horas após as 17 horas, é dada por $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$.

c) Em que período, entre 17h e meia-noite, é maior o número de ouvintes da rádio? Qual a percentagem dos moradores que ouve, então, a rádio?

d) Em que período, entre 17h e meia-noite, é menor o número de ouvintes da rádio? Qual a percentagem dos moradores que ouve, então, a rádio?

4. Um fabricante produz certo produto ao custo unitário de R$ 5,00 e calcula que, se vendê-los a x reais a unidade, os clientes comprarão 20–x unidades por dia. A que preço o fabricante deve vender seu produto para que seja máximo o lucro obtido?

5. A função demanda de determinado produto é $D(p) = 160 - 2p$, onde p representa o preço de venda do produto. Qual o preço do produto que torna maior a despesa do consumidor?

6. Um fabricante produz certo produto ao custo de R$ 2,00 a unidade. O preço de venda do produto é de R4 5,00 cada e, neste caso, vendem-se 4.000 unidades mensalmente. O fabricante pretende elevar o preço do produto e calcula que, para cada aumento de R4 1,00, deixará de vender 400 unidades. Por quanto o fabricante deverá vender seu produto a fim de obter o lucro máximo?

7. Um jornaleiro adquire certa publicação por R$ 3,00 cada, revendendo-a por R$ 15,00. Nestas condições, ele vende 200 exemplares por mês. O jornaleiro quer estimular a venda dessa publicação e pretende reduzir o preço de cada exemplar, calculando que para cada redução de R$ 1,00 sua venda seja aumentada em 20 exemplares mensais. Por quanto o jornaleiro deverá vender esta publicação para que seu lucro seja máximo?

8. Uma companhia de transporte coletivo deseja alugar ônibus para grupos de 35 ou mais pessoas. Cada elemento de um grupo de 35 pessoas pagará R$ 60,00. Em grupos maiores, todos receberão um desconto no preço da pas-

sagem, sendo este de R$ 0,50 por pessoa que exceder as 35 iniciais. Quantas pessoas deve ter cada grupo para que a receita da companhia seja máxima?

9. Numa fazenda com 60 laranjeiras, a média da colheita é de 400 laranjas por árvore. Calcula-se que, plantando outras laranjeiras na mesma área, haverá um decréscimo de 4 laranjas por árvore, para cada árvore adicional plantada. Quantas árvores adicionais devem ser plantadas para que a produção seja máxima?

10. Fazendeiros vendem cada fruta por R$ 2,00 no início da colheita em 1º de junho; depois o preço de cada fruta decai R$ 0,02 por dia. Num pequeno sítio, um fazendeiro colheu 80 frutas e a colheita cresce, em média, 1 fruta por dia. Quando deve ser feita a colheita para que a receita do fazendeiro seja máxima?

11. Um fabricante vende certo artigo aos distribuidores a R$ 20,00 a unidade para pedidos de menos de 50 unidades. No caso de pedidos de 50 unidades ou mais (até 600), o preço unitário goza de um desconto de 2 centavos vezes o número encomendado. Qual o volume da encomenda que proporciona maior receita para o fabricante?

12. O proprietário de um pomar estima que, plantando 24 árvores por are, cada árvore produzirá 600 maçãs por ano. Para cada árvore adicional plantada por are, haverá uma redução de 24 maçãs por pé por ano. Quantas árvores ele deverá plantar por are de modo a maximizar o número de maçãs?

13. Uma companhia imobiliária tem 180 apartamentos, todos alugados a R$ 300,00 por mês. Para cada aumento de R$ 10,00 no aluguel, vagam cinco apartamentos. Qual o aluguel que maximiza a renda total?