

**MATERIAL**

**DE**

**MATEMÁTICA I**

**CAPÍTULO II**

**FUNÇÕES**

**Curso:**  
**Administração**

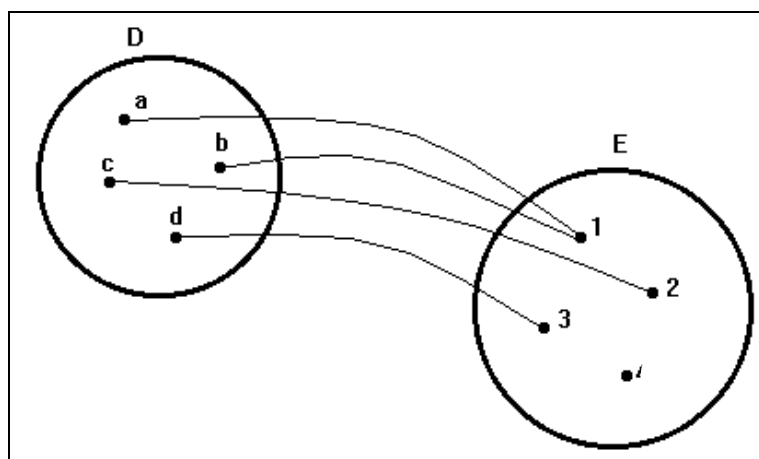
## 2. Funções

### 2.1 – Introdução

É comum nos depararmos com situações onde o valor de uma quantidade depende de outra. Como por exemplo, A demanda de um certo produto pode depender de seu preço de mercado; o lucro de uma empresa pode depender de sua receita e de seu custo; o tamanho de uma criança pode depender de sua idade; a quantidade de poluentes no ar pode depender do número de carros e indústrias da região. Muitas vezes, tais relações podem ser representadas (modeladas) através de funções matemáticas. Então podemos definir:

Função é uma regra que associa cada objeto de um conjunto  $D$  a exatamente um objeto de um outro conjunto  $E$ .

E podemos representar uma função  $f$  pelo diagrama abaixo:



Observe, pela figura, que cada elemento  $x$  do conjunto  $D$  está associado a apenas um elemento do conjunto  $E$ , o qual podemos chamar de **imagem de  $x$**  e representá-lo por  $f(x)$ , pois é o resultado da transformação de  $x$  pela função  $f$ .

O conjunto  $D$  é chamado de **domínio** da função. O conjunto  $E$  é chamado de **contra-domínio** da função.

No nosso curso,  $D$  e  $E$  serão sempre conjuntos de números reais.

Normalmente, a função  $f$  é definida utilizando-se uma fórmula matemática, por exemplo:

$$f(x) = x^2 + 3$$

É muito comum também, vermos a variável  $y$  substituindo  $f(x)$ :

$$y = x^2 + 3$$

Neste caso,  $y$  é chamada **variável dependente** e  $x$  **variável independente**, pois o valor de  $y$  é resultado do emprego da fórmula para um determinado valor de  $x$ , ou seja, o valor de  $y$  depende do valor de  $x$ .

Logo, se quisermos saber qual o número que está associado ao número 2 pela fórmula acima, basta fazer:

$$f(2) = 2^2 + 3 = 7$$

Ex.: 1) Determine, se possível,  $f(27)$ ,  $f(2)$  e  $f(1)$ , se  $f(x) = (x - 2)^{1/2}$

**Resolução:**

Sabemos que  $(x - 2)^{1/2} = \sqrt{x - 2}$ , então podemos escrever:  $f(x) = \sqrt{x - 2}$ , logo:

$$f(27) = \sqrt{27 - 2} = \sqrt{25} = 5$$

$$f(2) = \sqrt{2 - 2} = \sqrt{0} = 0$$

$$f(1) = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} \notin \mathfrak{R}$$

2) Determine  $f(-1)$ ,  $f(1)$  e  $f(2)$ , se  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & , se \ x < 1 \\ 3x^2 + 1 & , se \ x \geq 1 \end{cases}$

**Resolução:**

Da primeira fórmula, temos:

$$f(-1) = \frac{1}{-1-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Da segunda fórmula, temos:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$$

Observe no primeiro exemplo, que se  $x$  assumir determinados valores, por exemplo,  $x = 1$ , a função não poderá ser calculada. Então, é importante conhecermos o conjunto de valores para os quais a função poderá ser calculada, que é o **Domínio** da função. Para determinarmos esse conjunto, é preciso obedecer duas primícias básicas da matemática, que chamaremos de **CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA**, lembrando que trataremos apenas com número reais.

1ª – Em uma fração, denominador deve ser sempre diferente de ZERO ( $\neq 0$ ).

2ª – Em uma raiz de índice par, o radicando deve ser sempre maior ou igual a ZERO ( $\geq 0$ ).

Ex.: 3) Determine o domínio das funções abaixo:

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b)  $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$

c)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$

d)  $f(x) = \frac{\sqrt{4 + x}}{1 - x}$

**Resolução:**

a) Não há qualquer restrição, portanto,  $D = \mathfrak{R}$

b) Neste caso, devemos obedecer a primeira restrição:  $2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$ . Logo:

$$D = \left\{ x \in \mathfrak{R} \mid x \neq \frac{1}{2} \right\} \text{ ou } D = \mathfrak{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

c) Neste caso, devemos obedecer a segunda restrição:  $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$   
 $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq 2\}$  ou  $D = [2, \infty)$

d) Este é um caso típico onde devemos satisfazer às duas restrições:

1ª)  $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

2ª)  $4 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

Logo, unindo as duas respostas, temos:

$$D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \geq -4\} \text{ ou } D = [-4, \infty) - \{1\}$$

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Calcule os valores indicados das funções abaixo:

a)  $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ;  $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-2)$

b)  $h(t) = (2t + 1)^3$ ;  $h(-1)$ ,  $h(0)$ ,  $h(1)$

c)  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ;  $g(-1)$ ,  $g(1)$ ,  $g(2)$

d)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;  $f(2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(-1)$

e)  $h(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 4}$ ;  $h(2)$ ,  $h(0)$ ,  $h(-4)$

f)  $g(x) = \sqrt{(x+1)^3}$ ;  $g(0)$ ,  $g(-1)$ ,  $g(8)$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$ ;  $f(1)$ ,  $f(5)$ ,  $f(13)$

h)  $h(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ ;  $h(3)$ ,  $h(1)$ ,

$h(0)$ ,  $h(-3)$

i)  $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t < -5 \\ t+1 & \text{se } -5 \leq t \leq 5 \\ \sqrt{t} & \text{se } t > 5 \end{cases}$ ;  $f(-6)$ ,  $f(-5)$ ,

$f(0)$ ,  $f(16)$

2 – Especifique o domínio das funções abaixo:

a)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5$

b)  $g(x) = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$

c)  $f(t) = \frac{t + 1}{t^2 - t - 2}$

d)  $g(t) = \frac{2t - 1}{t^2 + 2t + 5}$

e)  $f(x) = \sqrt{3 - x}$

f)  $g(x) = \sqrt{3x + 8}$

g)  $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{3x - 12}}$

h)  $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

### RESPOSTAS

1 – a)  $f(1) = 6$ ;  $f(0) = -2$ ;  $f(-2) = 0$

b)  $h(-1) = -1$ ;  $h(0) = 1$ ;  $h(1) = 27$

c)  $g(-1) = -2$ ;  $g(1) = 2$ ;  $g(2) = 5/2$

d)  $f(2) = 2/5$ ;  $f(0) = 0$ ;  $f(-1) = -1/2$

e)  $h(2) = 2\sqrt{3}$ ;  $h(0) = 2$ ;  $h(-4) = 2\sqrt{3}$

f)  $g(0) = 1$ ;  $g(-1) = 0$ ;  $g(8) = 27$

g)  $f(1) = 1$ ;  $f(5) = 1/27$ ;  $f(13) = 1/125$

h)  $h(3) = 10$ ;  $h(1) = 6$ ;  $h(0) = 4$ ;  $h(-3) = -2$

i)  $f(-6) = 3$ ;  $f(-5) = -4$ ;  $f(0) = 1$ ;  $f(16) = 4$

2 – a)  $D = \mathcal{R}$

b)  $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \neq -2\}$

c)  $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq -1\}$

d)  $D = \mathcal{R}$

e)  $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \leq 3\}$

f)  $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geq -8/3\}$

g)  $D = \{x \in \mathcal{R} \mid x > 4\}$

h)  $D = \mathcal{R}$

## 2.2 – Aplicação

Numa situação prática, não costumamos usar  $x$  e  $y$ , mas letras que sugerem as grandezas em questão, por exemplo,  $C$  – custo,  $q$  – quantidade,  $R$  – receita,  $L$  – lucro, etc.

Ex.: 4) Suponha que o custo total de fabricação de  $q$  unidades de uma certa mercadoria seja dada pela função  $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$

- Calcule o custo de fabricação de 10 unidades da mercadoria.
- Calcule o custo de fabricação da 10ª unidade da mercadoria.

**Resolução:**

a) O custo de fabricação de 10 unidades é o valor da função custo total quando  $q = 10$ .

$$\text{Logo: } C(10) = 10^3 - 30 \cdot 10^2 + 500 \cdot 10 + 200 = 3200.$$

O custo para fabricar 10 unidades da mercadoria é de R\$3.200,00

b) O custo de fabricação da 10ª unidade é a diferença entre o custo de fabricação de 10 unidades e o custo de fabricação de 9 unidades.

$$\text{Então, como } C(9) = 9^3 - 30 \cdot 9^2 + 500 \cdot 9 + 200 = 2999, \text{ temos:}$$

$$C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201,00$$

O custo para fabricar a 10ª unidade é de R\$201,00.

<b>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</b>
-----------------------------

1 – Suponha que o custo total para se fabricar  $q$  unidades de um certo produto seja dado pela função  $C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500$

- Calcule o custo de fabricação de 20 unidades.
- Calcule o custo de fabricação da 20ª unidade.

2 – Um estudo sobre a eficiência de operários do turno da manhã de uma certa fábrica indica que um operário médio, que chega ao trabalho às 8 horas da manhã, monta,  $x$  horas depois de iniciado o expediente,  $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$  rádios transistores.

- Quantos rádios o operário terá montado às 10 horas da manhã?
- Quantos rádios o operário terá montado entre 9 e 10 horas da manhã?

3 – Suponha que às  $t$  horas do dia, a temperatura em uma certa cidade seja de

$$C(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10 \text{ graus centígrados.}$$

- Qual era a temperatura às 14 horas?
- De quanto a temperatura aumentou ou diminuiu, entre 18 e 21 horas?

4 – Suponha que a população de uma certa comunidade do interior, daqui a  $t$  anos, será de

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1} \text{ milhares de habitantes.}$$

- Daqui a 9 anos, qual será a população da comunidade?
- De quanto a população crescerá durante o 9º ano?
- A medida em que o tempo vai passando, o que acontecerá à população? Ela ultrapassará os 20.000 habitantes?

5 – Suponha que o número necessário de homens-hora para distribuir catálogos de telefone novos entre  $x$  por cento dos moradores de uma certa região seja dado pela

$$\text{função } f(x) = \frac{600x}{300-x}.$$

- Qual o domínio da função  $f$ ?
- Para que valores de  $x$ , no contexto do problema,  $f(x)$  tem interpretação prática?

- c) Quantos homens-hora são necessários para distribuir catálogos novos entre os primeiros 50% dos moradores?  
 d) Quantos homens-hora são necessários para distribuir catálogos novos na comunidade inteira?  
 e) Que porcentagem dos moradores da comunidade recebeu catálogos novos, quando o número de homens-hora foi 150?

6 – Durante a última Campanha Nacional de Vacinação, representantes do Ministério da Saúde constataram que o custo para vacinar  $x$  por cento da população infantil era de, aproximadamente,  $f(x) = \frac{150x}{200-x}$  milhões de reais.

- a) Qual o domínio da função  $f$ ?  
 b) Para que valores de  $x$ , no contexto do problema,  $f(x)$  tem interpretação prática?  
 c) Qual foi o custo para vacinar os primeiros 50% das crianças?  
 d) Qual foi o custo para que os 50% restantes fossem vacinados?  
 e) Que porcentagem foi vacinada, ao terem sido gastos 37,5 milhões de reais?

7 – Uma instituição iniciou um programa para arrecadação de fundos. Estima-se que serão necessárias  $f(x) = \frac{10x}{150-x}$  semanas para arrecadar  $x$  por cento do valor desejado.

- a) Qual o domínio da função  $f$ ?  
 b) Para que valores de  $x$ , no contexto do problema,  $f(x)$  tem interpretação prática?  
 c) Qual o tempo necessário para arrecadar 50% do valor desejado?  
 d) Qual o tempo necessário para arrecadar 100% do valor desejado?

8– Uma bola foi jogada de cima de um edifício. Sua altura, depois de  $t$  segundos, é de,  $H(t) = -16t^2 + 256$  metros.

- a) Em que altura estará a bola depois de 2 segundos?  
 b) Que distância a bola terá percorrido no 3º segundo?  
 c) Qual a altura do edifício?  
 d) Quando a bola atingirá o chão?

## RESPOSTAS

1 – a) R\$ 4.500  
 b) R\$ 371,00

2 – a) 46 rádios  
 b) 26 rádios

3 – a) 33,33° C  
 b) diminuiu 7,5° C

4 – a) 19.400 habitantes  
 b) 67 habitantes  
 c) A população crescerá a cada ano, mas nunca ultrapassará aos 20.000 habitantes.

5 – a)  $D = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \neq 300\}$   
 b)  $0 \leq x \leq 100$   
 c) 120 homens-hora  
 d) 300 homens-hora

e) 60% da população

6 – a)  $D = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \neq 200\}$   
 b)  $0 \leq x \leq 100$   
 c) 50 milhões de reais  
 d) 100 milhões de reais  
 e) 40% da população infantil

7 – a)  $D = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \neq 150\}$   
 b)  $0 \leq x < 150$   
 c) 5 semanas  
 d) 20 semanas

8 – a) 192 metros  
 b) 80 metros  
 c) 256 metros  
 d) 4 segundos

## 2.3 – Funções Usuais

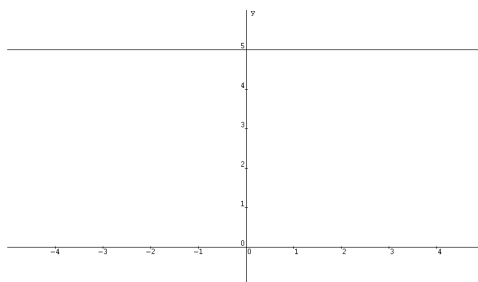
### 2.3.1 – Função Constante: $y = k$

Seja  $k$  um número real qualquer, essa função é aquela que representa sempre o mesmo valor para  $y$ , independente do valor de  $x$ . Sua representação gráfica é uma reta paralela ao eixo- $x$  e que passa pelo ponto  $y = k$ .

Ex.: 5)  $f(x) = 5$ .

Então,  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 5$ , ou seja, o valor da função é sempre 5 independente do valor de  $x$ .

Seu gráfico será:



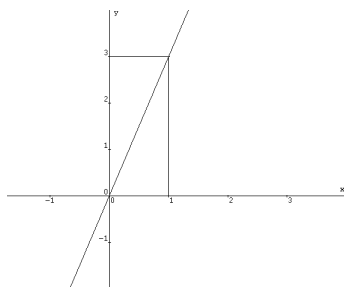
### 2.3.2 – Função Linear (Função do 1º Grau)

É uma função do tipo  $f(x) = mx + b$ . Sua representação gráfica é uma reta, onde  $m$ , que é o **coeficiente angular**, indica a inclinação ou a direção da reta, e  $b$ , que é o **coeficiente linear**, indica o ponto onde a reta intercepta o eixo- $y$ . Para construí-la, é necessário que tenhamos 2 pontos, então, damos dois valores aleatórios para  $x$  e calculamos o valor de  $y$  correspondente. Colocamos esses pontos no plano e traçamos a reta.

Ex.: 6) Trace o gráfico das funções abaixo:

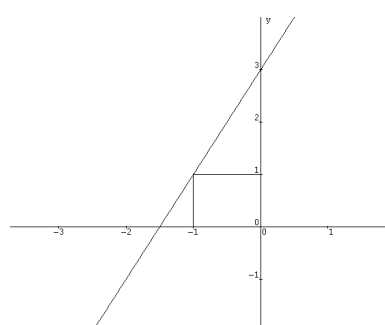
a)  $y = 3x$

$x$	$y$
0	0
1	3



b)  $y = 2x + 3$

$x$	$y$
0	3
-1	1



Uma característica muito importante da função linear é que a variação do  $y$  é sempre a mesma quando o  $x$  varia de uma unidade. Por exemplo, seja a função anterior

$f(x) = 2x + 3$ . Vamos fazer uma tabela com alguns valores de  $x$  (variando de 1 a 1) e seus respectivos  $y$ :

$x$	$y$
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

Observe, que, à medida que o  $x$  varia de uma em uma unidade, o  $y$  varia sempre de 2 em 2.

Vejamos ainda, outro exemplo:  $f(x) = 2 - 3x$

$x$	$y$
-1	5
0	2
1	-1
2	-4
3	-7

Note que neste exemplo, o  $x$  varia de 1 em 1 enquanto o  $y$  varia de  $-3$  em  $-3$ . A variação do  $y$  não é a mesma do exemplo anterior, mas durante este exemplo, ela não se modifica, mantendo-se sempre uma queda de três unidades entre um  $y$  e o posterior, desde que  $x$  aumente de uma unidade.

Note também que essa variação, tanto neste exemplo quanto no anterior, é igual ao coeficiente angular das retas que representam ambas as funções. Então podemos concluir que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

### 2.3.2.1 – Equação da reta dados dois pontos

Nós conhecemos dois pontos,  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ , e o nosso objetivo é, a partir deles, determinar a equação da reta,  $y = mx + b$ , que passa por eles. E, para isso, necessitamos calcular os valores de  $m$  e  $b$ .

Ex.: 7) Calcule a equação da reta que passa pelos pontos  $P_1 = (1, 3)$  e  $P_2 = (3, 7)$

Podemos resolver esse problema de duas formas:

#### 1ª) Sistema de Equações Lineares:

Substituímos os valores de  $x$  e  $y$  dos pontos na equação da forma  $y = mx + b$ . Então:

$$P_1 = (1, 3) \Rightarrow 3 = m + b$$

$$P_2 = (3, 7) \Rightarrow 7 = 3m + b$$

Resolvendo esse sistema encontramos os valores  $m = 2$  e  $b = 1$ . Logo a equação é  $y = 2x + 1$



### 2ª) Fórmula do coeficiente angular

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{7 - 3}{3 - 1} = 2$$

Então,  $y = 2x + b$ . Agora, substituímos um dos dois pontos para calcular  $b$ , por exemplo, o primeiro ponto:

$$P_1 = (1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \times 1 + b \Rightarrow b = 1.$$

Portanto, a equação é  $y = 2x + 1$

### 2.3.2.2 – Equação da reta dados um ponto e o coeficiente angular.

Nós conhecemos um ponto,  $P_1(x_1, y_1)$  e o coeficiente angular  $m$ , e o nosso objetivo é, a partir deles, determinar a equação da reta,  $y = mx + b$ , que passa por eles. E, para isso, necessitamos calcular o valor de  $b$ .

Ex.: 8) Calcule a equação da reta que passa pelos pontos  $P_1 = (3, 8)$  e cujo coeficiente angular é  $m = -2$ .

Podemos resolver esse problema apenas substituindo os dados que temos na equação da reta,  $y = mx + b$ . Como já sabemos que  $m = -2$ , basta substituir o ponto nos valores de  $x$  e  $y$ :

$$y = -2x + b \Rightarrow 8 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 14$$

Portanto, a equação procurada é  $y = -2x + 14$

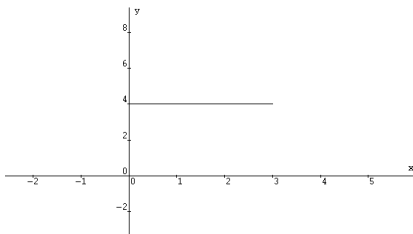
### 2.3.2.3 – Funções restritas a subconjuntos de números reais.

Embora o domínio dessas funções seja todo o conjunto dos números reais, em aplicações práticas, essas funções podem estar restritas a subconjuntos de números reais.

Ex.: 9) Trace o gráfico das seguintes funções:

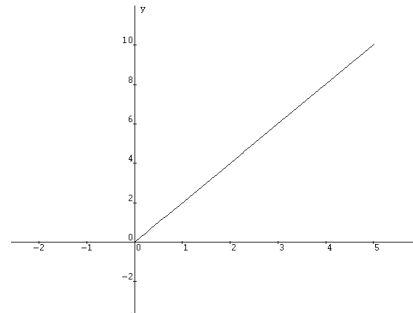
a)  $y = 4, 0 \leq x < 3$

$x$	$y$
0	4
3	4



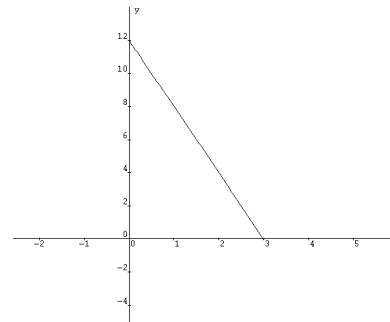
b)  $y = 2x, 0 < x < 5$

$x$	$y$
0	0
5	10



c)  $y = -4x + 12, 0 \leq x \leq 3$

x	y
0	12
3	0



### 2.3.2.4 – Interseção entre duas funções.

Para determinar o ponto de interseção entre duas funções, basta igualar as suas equações e resolver a equação resultante.

Ex.: 10) Calcule o ponto de interseção das funções  $y = 2x + 3$  e  $y = -3x - 7$ .

#### Resolução:

Devemos igualar as duas funções e resolver a equação resultante:

$$2x + 3 = -3x - 7 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$$

Agora, devo substituir o valor de  $x$  encontrado em qualquer uma das duas funções dadas, para encontrar o valor de  $y$ , por exemplo, na primeira função:

$$y = 2 \cdot (-2) + 3 \Rightarrow y = -1$$

Logo, o ponto de interseção das retas acima é o ponto  $(-2, -1)$

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Represente graficamente as retas dadas abaixo:

a)  $y = 2x - 6, 0 \leq x \leq 5$

d)  $y = 2,5x, x \geq 0$

b)  $y = 10, -1 < x < 1$

c)  $y = 5 - 3x, -2 \leq x \leq 3$

2 – Calcule o ponto de interseção das retas abaixo:

a)  $y = 2x + 5$  e  $y = 3x$

d)  $y = 3x + 5$  e  $y = 3 - x$

b)  $y = 100 - \frac{1}{2}x$  e  $y = 2x - 50$

e)  $y = 5x - 14$  e  $y = 4 - x$

c)  $y = 2x - 4$  e  $y = 3x + 2$

f)  $y = 3x + 8$  e  $y = 3x - 2$

3 – Escreva a equação que passa pelos seguintes pontos:

a)  $P_1(0,0)$  e  $P_2(2,4)$

c)  $P_1(0,20)$  e  $P_2(12,0)$

e)  $P_1(2,-3)$  e  $P_2(0,4)$

b)  $P_1(0,3)$  e  $P_2(8,3)$

d)  $P_1(2,10)$  e  $P_2(8,1)$

f)  $P_1(-1,2)$  e  $P_2(2,5)$

4 – Escreva a equação da reta que passa pelo ponto P e têm coeficiente angular m:

a)  $P(0,0)$  e  $m = -2$

c)  $P(3,10)$  e  $m = -1$

e)  $P(-1,2)$  e  $m = 2/3$

b)  $P(2,7)$  e  $m = 1/2$

d)  $P(7,1)$  e  $m = 0$

f)  $P(5,-2)$  e  $m = -1/2$

### RESPOSTAS

2 – a) (5, 15)

c) (-6, -16)

e) (3, 1)

b) (60, 70)

d) (-1/2, 7/2)

f) não existe

3 - a)  $y = 2x$

b)  $y = 3$

c)  $y = -\frac{5x}{3} + 20$

d)  $y = -\frac{3x}{2} + 13$

e)  $y = -\frac{7x}{2} + 4$

f)  $y = x + 3$

4 - a)  $y = -2x$

b)  $y = \frac{x}{2} + 6$

c)  $y = -x + 13$

d)  $y = 1$

e)  $y = \frac{2x}{3} + \frac{8}{3}$

f)  $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

### 2.3.3 – Função de 2º Grau (Função Quadrática)

É a função dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Sua representação gráfica é uma parábola cujos principais pontos são:

a) Cruzamento com o eixo-x:  $(x', 0)$  e  $(x'', 0)$

b) Vértice:  $V = (x_v, y_v)$  cujas coordenadas são dadas por:  $x_v = \frac{-b}{2a}$  e  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Observe que, se  $a > 0$ , a parábola terá sua **concavidade para cima**, ao passo que, se  $a < 0$ , ela terá **concavidade para baixo**.

Ex.: 11) Construa o gráfico das funções abaixo:

a)  $y = x^2 - 6x + 8$

**Resolução:**

a.1) Cruzamento com o eixo-x:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x' = 4 \text{ e}$$

$$x'' = 2$$

Então os pontos são:  $(4, 0)$  e  $(2, 0)$

a.2) Vértice:

$$x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

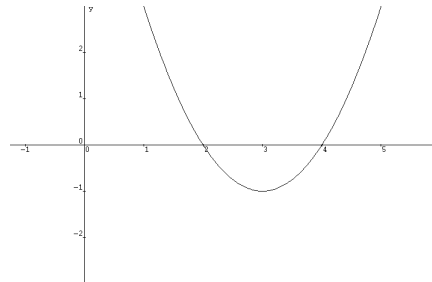
$$y_v = \frac{-4}{4 \cdot 1} = -1$$

$$V = (3, -1)$$

Então temos a seguinte tabela:

x	y
2	0
4	0
3	-1

Gráfico:



b)  $y = 10x - x^2$

**Resolução:**

b.1) Cruzamento com o eixo-x:

$$\Delta = (10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 100$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x' = 0 \text{ e } x'' = 10$$

Então os pontos são:  $(0, 0)$  e  $(10, 0)$

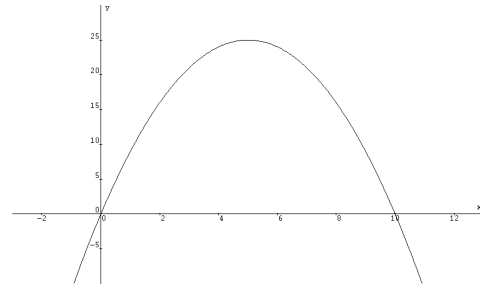
b.2) Vértice:

$$x_v = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$$

$$y_v = \frac{-100}{4 \cdot (-1)} = 25$$

$$V = (5, 25)$$

$x$	$y$
0	0
10	0
5	25



### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 – Represente graficamente as funções dadas abaixo:

a)  $y = 4 - x^2$

d)  $y = x^2 + 3x - 10$

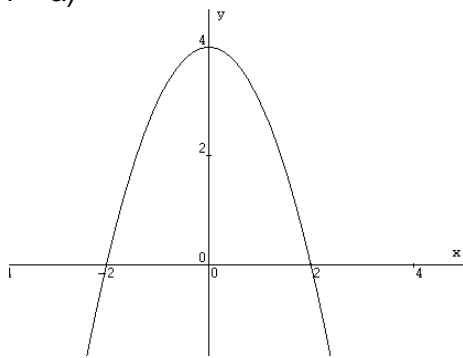
b)  $y = -x^2 + 8x - 17$

e)  $y = -x^2 + 3x - 10$

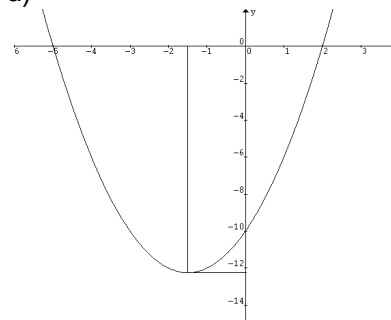
c)  $y = x^2 + 1$

### RESPOSTAS

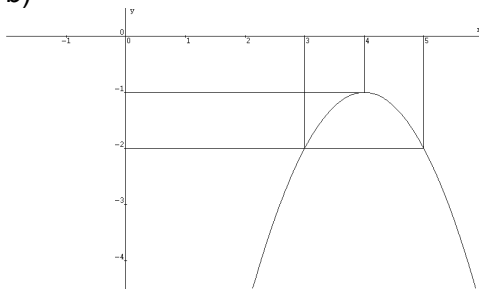
1 – a)



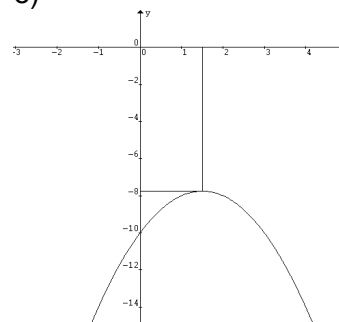
d)



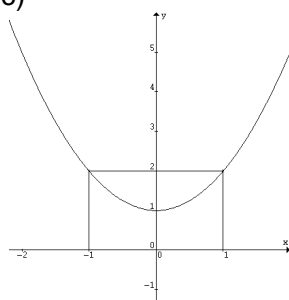
b)



e)



c)



## 2.4 – Aplicações de funções de 1º e de 2º graus

### 2.4.1 – Receita, Custo e Lucro Total

A receita total  $R_T$  obtida pela venda de uma certa quantidade  $q$  de um determinado produto cujo preço é  $P$  é dada pela função  $R_T = P \cdot q$  que é a função receita.

Com relação ao custo para fabricar uma quantidade  $q$  de um certo produto, teremos que analisar os dados e tentar determinar a função que melhor se adapte aos dados. No nosso caso, trataremos de problemas lineares, portanto, nossa função custo total é dada por  $C_T = C_F + C_V$ , onde:

**$C_T$  = Custo total**

**$C_F$  = Custo fixo (custo inicial)**

**$C_V$  = Custo variável (custo unitário  $\times$  quantidade)**

A função lucro total  $L_T$ , que está associada à produção (custo) e venda (receita) de uma certa utilidade é dada por:  $L_T = R_T - C_T$ . Observe que, se o resultado dessa função for negativo, significa que, ao invés de lucro, houve prejuízo.

O ponto onde as duas funções se igualam ( $R = C$ ) é chamado **ponto de nivelamento ou break-even point**. Observe que para quantidades menores que a quantidade relativa ao ponto de nivelamento, haverá prejuízo para o fabricante, pois o custo será maior que a receita; mas se a quantidade produzida for maior que a quantidade relativa ao ponto de nivelamento, o fabricante terá lucro.

Ex.: 1) O custo total de um fabricante consiste em uma quantia fixa de R\$ 200,00 somada ao custo de produção, que é de R\$ 50,00 por unidade. Expresse o custo total como função do número de unidades produzidas e construa o gráfico.

2) Um fabricante vende a unidade de certo produto por R\$110,00. O custo total consiste em uma taxa fixa de R\$7.500,00 somada ao custo de produção de R\$60,00 por unidade.

- Construa as funções receita e custo e lucro total.
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
- Se forem vendidas 100 unidades, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
- Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R\$1.250,00
- Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

### 2.4.2 – Demanda de Mercado

Seja  $U$  uma utilidade (bem ou serviço) e seja  $D(p)$  a demanda ou procura de mercado desta utilidade a um preço  $p$ , isto é, a soma das quantidades que **todos** os compradores do mercado estão dispostos e aptos a adquirir a um preço  $p$ , em determinado período de tempo, que pode ser um dia, uma semana, um mês etc.

Função **demanda** é a função que associa um preço  $p$  à demanda ou procura de mercado. A representação gráfica dessa curva é a **curva de demanda da utilidade**.

Observe que para que haja demanda, é necessário que  $p > 0$  e  $D(p) > 0$ .

Ex.: 3) Suponha que a demanda de mercado de um produto, que é vendido em pacotes de 10 kg, seja dada por  $D(p) = 4.000 - 50p$

- Determine o intervalo de variação de  $p$ .
- Represente essa função graficamente.
- Determine o valor da demanda para  $p = R\$600$  e  $p = R\$40,00$
- A que nível estará o preço se a demanda for de 3.500 pacotes?
- A que preço a demanda será menor que 1.000 pacotes?
- A que preço a demanda será maior que 3.000 pacotes?
- Determine a função despesa do consumidor.
- Represente a função despesa graficamente.

### 2.4.3 – Oferta de Mercado

Oferta  $S(p)$  de mercado de uma utilidade cotada a um preço  $p$  é a soma das quantidades que **todos** os produtores estão dispostos e aptos a vender ao preço  $p$ , durante certo período de tempo.

A função que associa todo preço  $p$  à respectiva oferta de mercado é a **função oferta de mercado**. Sua representação gráfica constitui a **curva de oferta** da utilidade. Para que haja oferta, é necessário, naturalmente, que  $S(p) > 0$ .

Ex.: 4) Suponha que a oferta de mercado de um produto, seja dada por  $S(p) = 2p - 30$ , com  $p \leq 130$ .

- A partir de que preço haverá oferta?
- Represente graficamente a função.
- A que preço a oferta será de 100 unidades?
- A que preço a oferta será maior que 150 unidades?
- A que preço a oferta será menor que 200 unidades?

### 2.4.4 – Preço e quantidade de equilíbrio

**Lei da oferta e da procura:** O preço de mercado  $p$  de um produto indica o número de unidades que o fabricante deseja vender, assim como o número de unidades que o consumidor deseja comprar. Na maioria dos casos, à medida que o preço  $p$  de mercado aumenta, a oferta  $S(p)$  aumenta e a demanda  $D(p)$  diminui.

O **preço de equilíbrio de mercado** (PE) é o preço para o qual a demanda e a oferta de mercado coincidem ( $D(p) = S(p)$ ). A quantidade correspondente ao preço de equilíbrio é a **quantidade de equilíbrio de mercado** (QE).

Se para uma determinada quantidade, a oferta for maior que a procura haverá excesso do produto, caso contrário, haverá escassez do mesmo.

Ex.: 5) Dadas as funções demanda de mercado  $D(p) = 20 - p$  e a oferta  $S(p) = -\frac{20}{3} + \frac{5}{3}p$ , com  $p \leq 20$ , determine o preço de equilíbrio (PE) e a correspondente quantidade de equilíbrio (QE).

## 2.4.5 – Geral

Neste ponto, daremos início a aplicações gerais de funções de lineares e de como encontrar as funções apropriadas para cada situação. Para isso, faremos a seguinte observação com relação à função de 1º grau:

- Se a taxa de variação de uma quantidade com respeito à outra for constante, a função que relaciona tais quantidades é **linear** e a essa taxa de variação constante é o **coeficiente angular** da reta correspondente.

Ex.: 6) Desde o começo do ano, o preço dos pães integrais em um supermercado tem aumentado a uma taxa constante de R\$ 0,02 por mês. Em 1º de março, o preço era de R\$ 1,06 por unidade.

- a) Expresse o preço do pão em função do tempo.
- b) Determine o preço do pão no dia 01/05
- c) Determine o preço do pão no início do ano.
- d) Trace o gráfico da função.

7) A média dos pontos obtidos em um teste psicotécnico aplicado em determinada empresa vem decrescendo constantemente nos últimos anos. Em 1995, a média foi de 582, enquanto em 2000, foi de apenas 552 pontos.

- a) Exprima a média relativa ao teste, em função do tempo.
- b) Se a tendência atual se mantiver, qual será a média de pontos obtidos em tal teste em 2005?
- c) Se a tendência atual se mantiver, Quando a média de pontos será de 528 pontos?
- d) Trace o gráfico da função.

8) O aluguel de um carro numa agência é de R\$40,00 mais R\$0,80/km rodado. Uma segunda agência cobra R\$100,00 mais R\$0,50/km rodado. Que agência oferece o melhor plano de aluguel?

<b>EXERCÍCIOS PROPOSTOS</b>
-----------------------------

1) Uma fábrica de móveis vende mesas por R\$70,00 cada. O custo total de produção consiste de um sobretaxa de R\$8.000,00 somada ao custo de produção de R\$30,00 por mesa.

- a) Construa as funções receita e custo e lucro total.
- b) Quantas unidades o fabricante precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
- c) Se forem vendidas 250 mesas, qual será o lucro ou prejuízo do fabricante?
- d) Quantas unidades o fabricante precisa vender para obter um lucro de R\$6.000,00
- e) Construa, no mesmo par de eixos, os gráficos das funções receita e custo.

2) Um artesão têm um gasto fixo de R\$600,00 e, em material, gasta R\$25,00 por unidade produzida. Se cada unidade for vendida por R\$175,00:

- a) Construa as funções receita e custo e lucro total.
- b) Quantas unidades o artesão precisa vender para atingir o ponto de nivelamento?
- c) Quantas unidades o artesão precisa vender para obter um lucro de R\$450,00

3) Um grupo de amigos, que moraram nos EUA, deseja montar um curso de inglês. Eles observaram que, teriam um gasto fixo mensal de R\$1.680,00 e, gastariam ainda R\$ 24,00, em materiais e pagamento de professores, por aluno. Cada aluno deverá pagar R\$40,00.

- a) Quantos alunos o curso necessita ter para que não haja prejuízo?
- b) Qual será o lucro ou prejuízo do curso, se obtiverem 70 alunos?

- c) Quantos alunos o curso precisa ter para atingir um lucro de R\$592,00?
- 4) Num restaurante, a moqueca é servida por R\$10,00 e o preço da cerveja é de R\$1,80. Em outro, a moqueca é servida por R\$12,00, mas a cerveja custa R\$1,40. Ache um critério para decidir qual restaurante você irá, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira e supondo que você peça apenas uma moqueca.
- 5) Um bombeiro hidráulico cobra uma taxa de R\$31,00 e mais R\$2,60 a cada meia hora de trabalho. Um outro cobra R\$25,00 e mais R\$3,20 a cada meia hora. Ache um critério para decidir que bombeiro chamar, se forem levadas em conta apenas considerações de ordem financeira.
- 6) Uma agência de aluguel de carros cobra uma diária de R\$ 25,00 mais R\$ 0,30 por quilômetro rodado.
- Expresse o custo de alugar um carro dessa agência por um dia em função do número de quilômetros dirigidos e construa o gráfico.
  - Quanto custa alugar um carro para uma viagem de 200 km de um dia?
  - Quantos quilômetros foram percorridos se o custo do aluguel diário foi de R\$ 45,20 centavos?
- 7) Quando o preço de um certo produto for de  $p$  reais, um lojista espera oferecer  $S = 4p + 300$  produtos, enquanto a demanda local é de  $D = -2p + 480$ .
- Para que preço de mercado a oferta será igual a demanda local?
  - Quantos produtos serão vendidos por este preço?
  - Se o preço for de R\$ 20,00, haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?
  - Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.
- 8) As funções oferta e procura de um determinado produto são dadas, respectivamente, por  $S = p^2 + 3p - 70$  e  $D = 410 - p$ .
- Para que preço de mercado a oferta será igual à demanda?
  - Quantos produtos serão vendidos por este preço?
  - Se o preço for de R\$25,00 haverá excesso ou escassez do produto? De quanto?
  - Construa os dois gráficos no mesmo par de eixos.
- 9) Suponha que a demanda de mercado de um produto, seja dada por  $D(p) = 45 - 5p$  unidades, onde  $p$  é o preço por unidade do bem.
- Determine o intervalo de variação de  $p$ .
  - Represente essa função graficamente.
  - Determine o valor da demanda para  $p = \text{R\$ } 5,00$
  - A preço a demanda será de 30 pacotes?
  - A que preço a demanda será menor ou igual a 10 pacotes?
  - A que preço a demanda será maior ou igual a 35 pacotes?
  - Determine a função despesa do consumidor.
  - Represente a função despesa graficamente.
- 10) Suponha que a demanda de mercado de um produto seja dada por  $D(p) = 16 - p^2$ , onde  $p$  é o preço por unidade
- Determine o intervalo de variação de  $p$ .
  - Represente essa função graficamente.
  - Determine o valor da demanda para  $p = \text{R\$ } 2,00$
- 11) A demanda de mercado de um certo produto, que é vendido em galões, é dada pela seguinte função  $D(p) = 8000 - 100p$ .
- Determine o intervalo de variação de  $p$ .



- b) Represente graficamente a função demanda
- c) Calcule os valores da demanda correspondentes aos preços  $p = R\$ 40,00$ ,  $p = R\$ 50,00$  e  $p = R\$ 75,00$ .
- d) A que preço a demanda será de 4.500 galões?
- e) A que preços a demanda será menor que 2.000 galões?
- f) A que preços a demanda será maior que 5.000 galões?
- g) A que preços a demanda ficará entre 5.500 e 6.500 galões?
- h) Determine a função despesa do consumidor.
- i) Represente a função despesa graficamente.

12) A demanda de mercado de um certo produto é dada pela função  $D(p) = -p^2 - p + 56$ .

- a) Represente graficamente a função demanda
- b) Determine o intervalo de variação de  $p$ .
- c) Qual o valor da demanda se o preço for R\$ 6,00?
- d) A que preço a demanda será de 44 unidades?

13) Seja a oferta de mercado de uma utilidade dada por  $S = -200 + 2p$ , com  $p \leq R\$ 270,00$

- a) A partir de que preço haverá oferta?
- b) Construa o gráfico da função.
- c) Qual o valor da oferta se  $p = R\$ 270,00$ ?
- d) A que preço a oferta será de 180 unidades?
- e) A que preços a oferta será maior que 150 unidades?
- f) A que preços a oferta será menor que 250 unidades?
- g) Para que preços a oferta ficará entre 200 e 300 unidades?

14) Considere a oferta dada pela função  $S = p^2 - 64$ , com  $p \leq 20$ .

- a) A partir de que preço haverá oferta?
- b) Qual o valor da oferta para  $p = R\$ 20,00$ ?
- c) A que preço a oferta será de 297 unidades?
- d) A que preço a oferta será de 57 unidades?
- e) Trace o gráfico da curva oferta.

15) Seja a oferta de mercado de uma utilidade dada por  $S = -30 + 2p$ , com  $p \leq R\$ 100,00$

- a) A partir de que preço haverá oferta?
- b) Construa o gráfico da função.
- c) Qual o valor da oferta se  $p = R\$ 27,00$ ?
- d) A que preço a oferta será de 80 unidades?
- e) A partir de que preço a oferta será maior que 50 unidades?
- f) A partir de que preço a oferta será menor que 150 unidades?
- g) Para que preços a oferta ficará entre 20 e 70 unidades?

16) Determine o preço e a quantidade de equilíbrio nos seguintes casos:

- a)  $D = 34 - 5p$ ,  $S = -8 + 2p$
- b)  $D = 10 - 0,2p$ ,  $S = -11 + \frac{1}{2}p$
- c)  $D = 32 - p^2$ ,  $S = p^2 - 18$
- d)  $D = 56 - p^2$ ,  $S = p^2 - 16$

17) Um produtor compra R\$ 20.000,00 em máquinas, que se depreciam linearmente de tal forma que seu valor de troca após 10 anos é de R\$ 5.000,00.

- a) Expresse o valor das máquinas em função do seu tempo de uso e trace o gráfico.

b) Calcule o valor das máquinas após 4 anos.

18) Desde o começo do mês, um reservatório local está perdendo água a uma taxa constante. No décimo segundo dia do mês, o reservatório contém 200 milhões de litros de água e, no vigésimo primeiro dia, 164 milhões de litros.

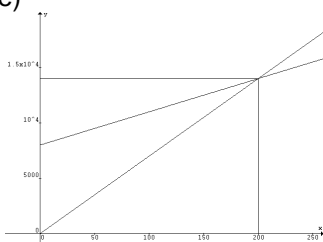
a) Expresse a quantidade de água no reservatório em função do tempo e trace o gráfico.

b) Quanta água estava no reservatório no primeiro dia do mês?

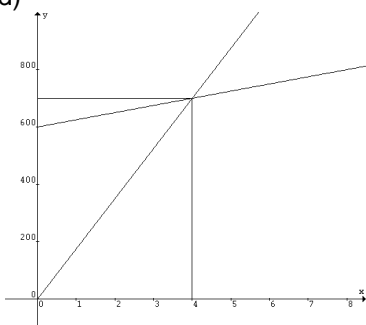
c) Quanta água estava no reservatório no vigésimo quinto dia do mês?

**RESPOSTAS**

- 1 – a)  $R = 70q$   
 $C = 8000 + 30q$   
 $L = 40q - 8000$
- b) 200
- c) lucro de R\$ 2000,00
- d) 350
- e)



- 2 – a)  $R = 175q$   
 $C = 600 + 25q$   
 $L = 150q - 600$
- b) 4
- c) 7
- d)



- 3 – a) 105
- b) prejuízo de R\$ 560,00
- c) 142

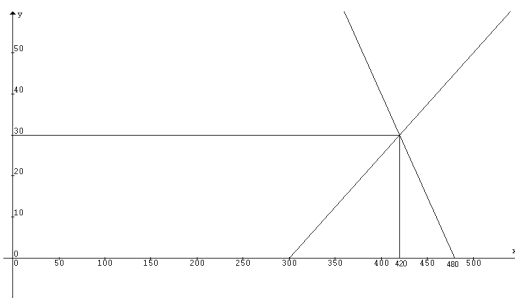
4 – Se tomar 5 cervejas, tanto faz o primeiro ou o segundo. Se tomar mais de 5 cervejas, o melhor é o segundo e se tomar menos de 5 cervejas, o melhor é o primeiro restaurante.

5 – Se o serviço durar 5 horas, tanto faz o primeiro ou o segundo. Se durar mais de 5 horas, o melhor é o segundo e se durar menos de 5 horas, o melhor é o primeiro bombeiro.

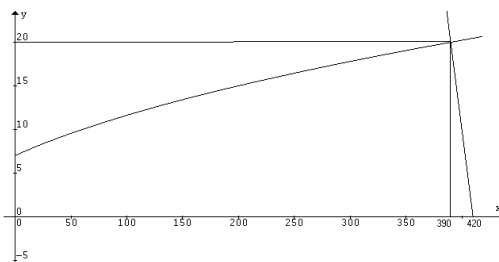
- 6 – a)  $C = 25 + 0,30x$
- b) R\$ 85,00
- c) 67,3 km

$y = (x - 300)/4 \{300, 1000\}$

- 7 – a) R\$ 30,00
- b) 420
- c) escassez de 60 produtos
- d)

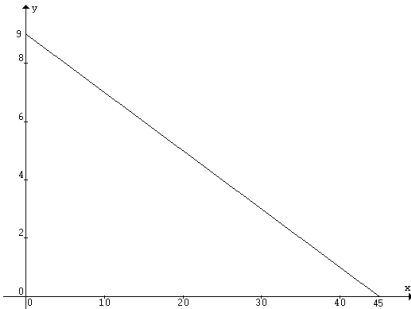


- 8 – a) R\$ 20,00
- b) 390
- c) excesso de 245 produtos
- d)



- 9 – a)  $0 < p < 9$

b)



c) 20

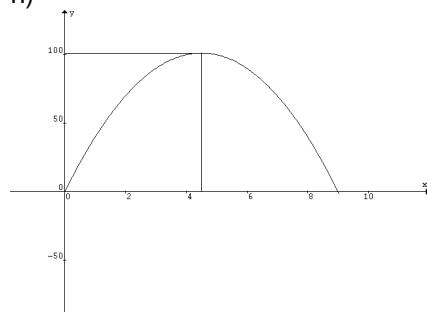
d) R\$ 3,00

e)  $7 < p < 9$

f)  $0 < p \leq 2$

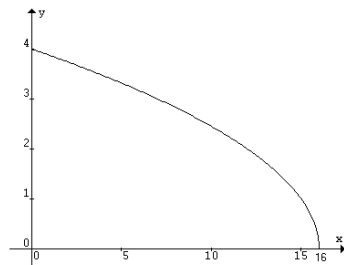
g)  $D_e(p) = 45p - 5p^2, 0 < p < 9$

h)



10 – a)  $0 < p < 4$

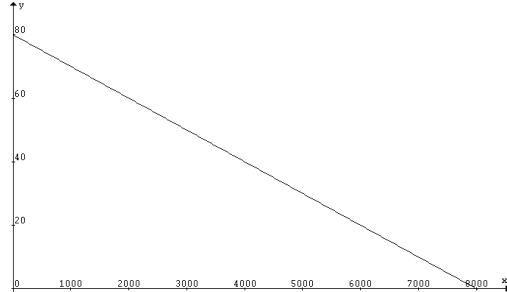
b)



c) 12

11 – a)  $0 < p < 80$

b)



c) 4.000, 3.000 e 500 respectivamente.

d) R\$ 35,00

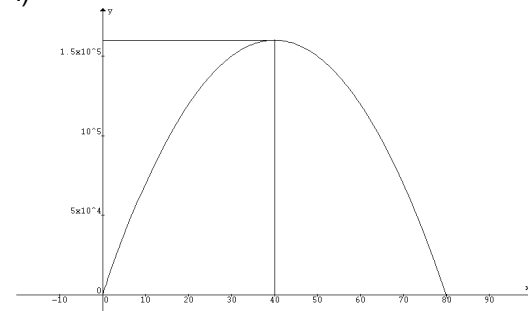
e)  $60 < p < 80$

f)  $0 < p < 30$

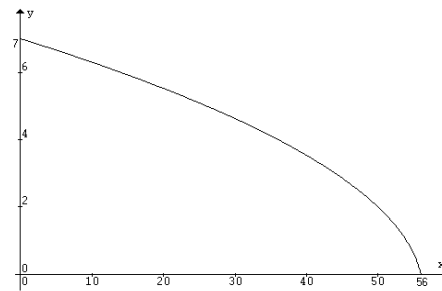
g)  $15 < p < 25$

h)  $D_e(p) = 8000p - 100p^2, 0 < p < 80$

i)



12 – a)



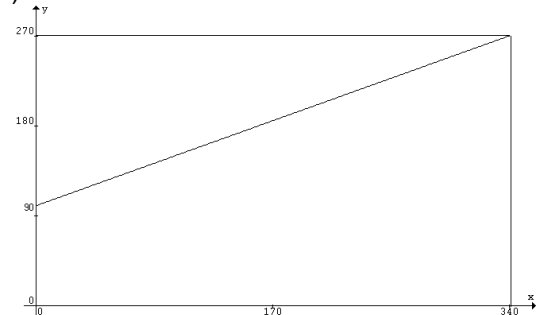
b)  $0 < p < 7$

c) 14

d) R\$ 3,00

13 – a) R\$ 100,00

b)



c) 340

d) R\$ 190,00

e)  $175 < p \leq 270$

f)  $100 < p < 225$

g)  $200 < p < 250$

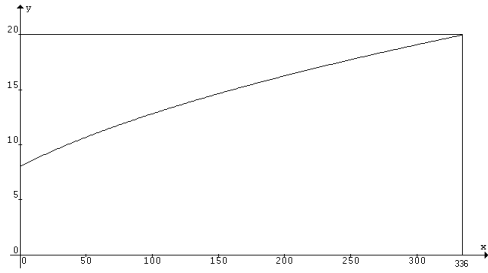
14 – a) R\$ 8,00

b) 336

c) R\$ 19,00

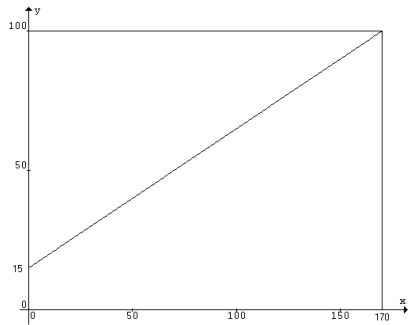
d) R\$ 11,00

e)



15 – a) R\$ 15,00

b)



c) 24

d) R\$ 55,00

e)  $40 < p \leq 100$

f)  $15 < p < 90$

g)  $25 < p < 50$

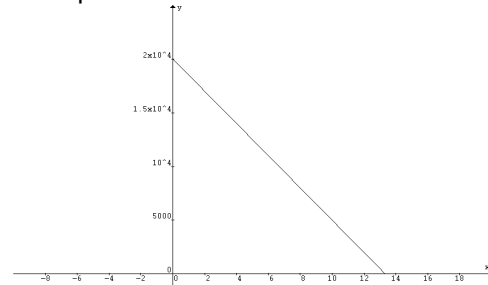
16 – a)  $p = \text{R\$ } 6,00$  e  $q = 4$

b)  $p = \text{R\$ } 30,00$  e  $q = 4$

c)  $p = \text{R\$ } 5,00$  e  $q = 7$

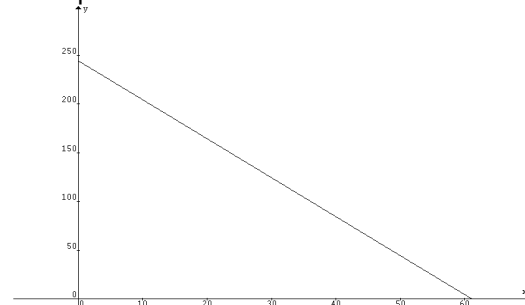
d)  $p = \text{R\$ } 6,00$  e  $q = 20$

17 – a)  $f(t) = 20000 - 1500t$   
 $t$  é expresso em anos



b) R\$ 14.000,00

18 – a)  $f(t) = 244 - 4t$   
 $t$  é expresso em dias



b) 244 milhões de litros

c) 148 milhões de litros