Soluções dos Problemas do Capítulo 6

Seção 1

1. A resposta da primeira questão pode ser marcada de 5 modos diferentes. A da segunda, também de 5 modos, etc.

A resposta é 5^{10}.

2. Para formar um subconjunto você deve perguntar a cada elemento do conjunto se ele deseja participar do subconjunto. O primeiro elemento pode responder de dois modos: sim ou não. O segundo elemento, de dois modos, etc.

A resposta é 2^n.

3. A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3.

A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

4. A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1.

A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460\,800$.

5. O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes.

Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central.

Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $4 \times 60 = 240$ modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $24 \times 58 = 1\,392$ modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e 55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $36 \times 55 = 1\,980$ modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é $240+1\,392+1\,980 = 3\,612$.

Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, $1\,806$.

6. Haverá uma torre em cada linha. A torre da primeira linha pode ser colocada de 8 modos; a da segunda linha, de 7 modos, pois não pode ficar na mesma coluna da anterior, etc. A resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$.

Se as torres são diferentes, devemos primeiramente escolher qual a torre que ficará na primeira linha (8 modos) e depois escolher onde colocá-la na primeira linha (8 modos). Há $8 \times 8 = 64$ modos de colocar a torre da primeira linha. Analogamente, há $7 \times 7 = 49$ modos de colocar a torre da segunda linha etc. A resposta é $64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 1\,625\,702\,400$.

7. Vamos contar separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei.

Se a primeira carta for o rei de copas, a segunda poderá ser selecionada de 48 modos.

Se a primeira carta for de copas sem ser o rei, ela poderá ser selecionada de 12 modos e a segunda, de 47 modos.

A resposta é $1 \times 48 + 12 \times 47 = 612$.

8. Para construir uma função, você deve perguntar a cada elemento de A quem ele deseja flechar em B. O primeiro elemento de A pode fazer sua escolha de 7 modos, o segundo elemento de A pode fazer sua escolha de 7 modos etc. A resposta é $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2\,401$.

Se a função for injetiva, o primeiro elemento de A poderá fazer sua escolha de 7 modos, o segundo elemento de A poderá fazer sua escolha de 6 modos (pois não poderá escolher o mesmo elemento selecionado pelo primeiro), etc. A resposta é $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

9. a) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Os divisores positivos de 720 são da forma $a^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. Há $5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores positivos de 720. Uma decomposição de 720 em um produto de dois inteiros positivos, $720 = x \cdot y$, fica determinada quando se escolhe x, que deve ser divisor de 720. Há, portanto, 30 decomposições: 1×720, 2×360, $3 \times 120, \ldots, 720 \times 1$. Como o enunciado manda considerar iguais as decomposições 1×720 e 720×1, 2×360 e 360×2, etc., a resposta é 15.

b) Analogamente, $144 = 2^4 \cdot 3^2$ admite $5 \times 3 = 15$ divisores positivos. Há 15 decomposições, uma das quais é 12×12. As outras 14 decomposições podem ser agrupadas em 7 pares: 1×144 e 144×1, 2×72 e 72×2, etc. Como o enunciado manda considerar iguais as duas decomposições de cada par, a resposta é 8.

10. O armário de número k é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de k. Um armário ficará aberto se for mexido um número ímpar de vezes. Lembre-se que o número de divisores positivos de $k = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \times \ldots$ é igual a $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots$, que é ímpar se e somente se α, β, $\gamma, \ldots$ forem todos pars, ou seja, se e somente se k for quadrado perfeito.

Os armários que ficam abertos são os de números $1, 4, 9, 16, \ldots, 900$.

11. Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes.

Pondo cores iguais nos quadrantes 1 e 3, temos $5 \times 4 \times 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4.

A resposta é $80 + 180 = 260$.

12. Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição da letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas, etc... Por isso é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A. A resposta é $26^5 - 25^5 - 26^4 = 1\,658\,775$.

No caso sem repetição, pode-se contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante, etc. A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400$. Pode-se também repetir o raciocínio do caso com repetição:

$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 - 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 - 1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400$.

13. Há 26 modos de escolher cada letra e 10 modos de escolher cada algarismo.

A resposta é $26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000$.

14. Os 4 que preferem sentar de frente podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos; os que preferem sentar de costas podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos.

A resposta é $120 \times 60 \times 6 = 43\,200$.

15. O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números 10, 20, 30, $\ldots$, 2200. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos números $10x$, $20x$, $\ldots$, $220x$. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números $10xy$ e $20xy$.

A resposta é $222 + 220 + 200 = 642$.

16. Note que como são permitidas repetições, a condição do 5 figurar no número é terrível, pois ele pode figurar uma só vez, ou duas, etc ... É melhor fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura.

A resposta é $9 \times 10 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 3\,168$.

17. Para formar uma coleção, você deve decidir quantas “Veja” farão parte da coleção, etc.

A quantidade de revistas "Veja" pode ser escolhida de 6 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5). A de "Época", de 7 modos. A de "Isto É", de 5 modos. O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$.

O número de coleções não-vazias é 209.

18. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática. Escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta.

Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática, senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia); em um desses dias, a aula de Física só pode ser posta no horário de um único modo (pois a Matemática já ocupou o outro tempo) e, no outro, pode ser posta de 2 modos. Finalmente, a Química só pode ser posta no horário de um único modo – nos tempos restantes.

A resposta é $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$.

19. O casal João-Maria foi considerado diferente do casal Maria-João. Isso é devido a termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta real.

20. Há três tipos de cartões: os que não podem ser virados de cabeça para baixo, os que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número e os que virados de cabeça para baixo passam a representar números diferentes. Se há x, y e z cartões de cada um desses tipos, respectivamente, a resposta é $x + y + \frac{z}{2}$. É fácil calcular y, $z + y$ e $x + y + z$:

$z + y = 5^5$, pois os cartões que virados de cabeça para baixo continuam representando números são os formados apenas com 0, 1, 6, 8 e 9.

$x + y + z = 10^5$.

$y = 5 \times 5 \times 3$, pois os cartões que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número devem ter nas casas extremas um dos pares 11, 00, 88, 69 ou 96. Nas segunda e penúltima casas, a mesma coisa. Finalmente, na casa central deve estar 0, 1 ou 8.

Resolvendo o sistema, encontra-se $z = 3\,050$ e

$$x + y + \frac{z}{2} = 100\,000 - 1\,525 = 98\,475.$$

Seção 2

1.

a) Cada anagrama é uma permutação simples das letras C, A, P, I, T, U, L, O. O número de anagramas é $P_8 = 8! = 40\,320$.

b) A escolha da vogal inicial pode ser feita de 4 modos e, depois disso, a vogal final pode ser escolhida de 3 modos. As restantes seis letras podem ser arrumadas entre essas vogais selecionadas de $P_6 = 6! = 720$ modos.

   A resposta é $4 \times 3 \times 720 = 8\,640$.

c) Os anagramas podem começar por vogal ou por consoante. No primeiro caso, devemos arrumar as 4 vogais nos lugares ímpares e as 4 consoantes nos lugares pares, o que pode ser feito de $4! \times 4! = 24 \times 21 = 576$ modos. O segundo caso é análogo.

   A resposta é $576 + 576 = 1\,152$.

d) Tudo se passa como se CAP fosse uma letra só. Portanto devemos arrumar 6 objetos, o bloco CAP e as 5 letras de ITULO. A resposta é $6! = 720$.

e) Escolha inicialmente a ordem das letras C, A, P, o que pode ser feito de $3! = 6$ modos. Recai-se no item anterior. A resposta é $6 \times 720 = 4\,320$.

f) Tudo que se tem a fazer é arrumar as 6 letras de CITULO após o PA. A resposta é $6! = 720$.

g) Ao somar os que têm p em primeiro $(7! = 5\,040)$ com os que têm a em segundo $(7! = 5\,040)$, os que têm p em primeiro e a em segundo $(6! = 720)$ são contados duas vezes. A resposta é $5\,040 + 5\,040 - 720 = 9\,360$. Pode-se também fazer um diagrama de conjuntos.

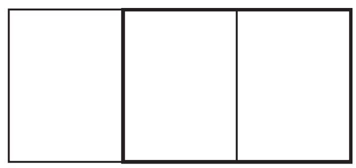

Figura 77

O retângulo de contorno mais claro representa o conjunto dos anagramas que têm p em primeiro lugar e o retângulo de contorno mais escuro representa o conjunto dos anagramas que têm a em segundo lugar. A interseção possui $6! = 720$ elementos e cada retângulo possui $7! = 5\,040$ elementos. Portanto, as regiões do diagrama têm $5\,040 - 720 = 4\,320$, 720 e $4\,320$ elementos.

A resposta é $4\,320 + 720 + 4\,320 = 9\,360$.

h) Ao somar os que têm p em primeiro $(7! = 5\,040)$ com os que têm a em segundo $(7! = 5\,040)$ e os que têm c em terceiro $(7! = 5\,040)$, os que têm p em primeiro e a em segundo $(6! = 720)$, bem como os que têm a em segundo e c em terceiro $(6! = 720)$ e os que têm p em primeiro e c em terceiro $(6! = 720)$, são contados duas vezes. Devemos, portanto, descontá-los uma vez. Mas, ao fazermos isso, os que têm p em primeiro e a em segundo e c em terceiro $(5! = 120)$ terão sido contados três vezes e descontados três vezes. Devemos contá-los uma vez.

A resposta é $5\,040+5\,040+5\,040-720-720-720+120 = 13\,080$.

Poderíamos ter feito um diagrama de três conjuntos: os que têm p em primeiro, os que têm a em segundo e os que têm c em terceiro lugar. Cada um desses conjuntos tem $7! = 5\,040$ elementos, as interseções dois a dois têm $6! = 720$ elementos e a interseção dos três conjuntos tem $5! = 120$ elementos. As sete regiões internas do diagrama terão 3 720, 3 720, 3 720, 600, 600, 600 e 120 elementos.

A resposta é $3\,720 + 3\,720 + 3\,720 + 600 + 600 + 120 = 13\,080$.

i) Há $3! = 6$ ordens possíveis para essas letras. A resposta é $\frac{1}{6}$ do total de anagramas, $\frac{1}{6}$ de 8!, que é igual a 6 720.

Também poderíamos escolher 3 das 8 posições do anagrama para colocar essas três letras ($C_8^3 = 56$ modos), colocá-las na ordem apc (1 modo) e arrumar as 5 outras letras nos 5 lugares restantes ($5! = 120$ modos). A resposta é $56 \times 1 \times 120 = 6\,720$.

j) Há $4! = 24$ ordens possíveis para as vogais. A resposta é $\frac{1}{24}$ do total de anagramas, $\frac{1}{24}$ de 8!, que é igual a 1 680.

Também poderíamos escolher 4 das 8 posições do anagrama para colocar as vogais ($C_8^4 = 70$ modos), colocar as vogais nos lugares escolhidos (1 modo, pois elas devem entrar em ordem alfabética) e arrumar as 4 consoantes nos 4 lugares restantes ($4! = 24$ modos). A resposta é $70 \times 1 \times 24 = 1\,680$.

2. A imagem do primeiro elemento de A pode ser selecionada de n modos, a do segundo, de $n - 1$ modos, etc.

A resposta é $n \cdot (n-1) \ldots 1 = n!$

3. Do total de arrumações $(8! = 40\,320)$, devem ser descontadas aquelas nas quais elas ficam juntas ($2! \times 7! = 10\,080$, pois elas podem ficar juntas em 2! ordens possíveis). A resposta é $40\,320 - 10\,080 = 30\,240$.

4. Do total de arrumações com Helena e Pedro juntos $(2! \times 7! = 10\,080)$, devem ser descontadas aquelas nas quais Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos $(2! \times 2! \times 6! = 2\,880)$. A resposta é $10\,080 - 2\,880 = 7\,200$.

5. Você deve escolher 5 jogadores para o Esporte, depois escolher 5 dos que sobraram para o Tupi e formar o Minas com os restantes. A resposta é $C_{15}^{5} \cdot C_{10}^{5} \cdot C_{5}^{5} = 3\,003 \times 252 \times 1 = 756\,756$.

Ou, então, ponha os 15 jogadores em fila: os 5 primeiros formam o Esporte, os 5 seguintes o Tupi, os 5 últimos o Minas. Note que, trocando a oredem dentro de cada bloco, você muda a fila, mas não muda a divisão em times. A resposta é $\dfrac{15!}{5!\,5!\,5!} = 756\,756$.

6. A resposta é a anterior dividida por $3! = 6$, pois agora, trocando os times entre si, a divisão é a mesma, ou seja, a resposta é $\dfrac{756\,756}{6} = 126\,136$.

7. Ponha os 20 objetos em fila, o que pode ser feito de $20!$ modos: os 3 primeiros formam o "primeiro" grupo de 3, os 3 seguintes formam o "segundo" grupo de 3, etc.

Note que, trocando a ordem dos elementos dentro de cada grupo, você muda a fila mas não muda a divisão em grupos. Note também que trocando os grupos de 3 entre si (o que pode ser feito de $4!$ modos) e os de 4 entre si (o que pode ser feito de $2!$ modos), você muda a fila mas não muda a divisão em grupos.

A resposta é $\dfrac{20!}{(3!)^4(4!)^2 4!2!} = 67\,897\,830\,000$.

Você também poderia pensar assim: Há C_{20}^{3} modos de escolher o "primeiro" grupo de 3, C_{17}^{3} modos de escolher o "segundo" grupo de 3, etc. Note que trocando os grupos de 3 entre si (o que pode ser feito de $4!$ modos) e os de 4 entre si (o que pode ser feito de $2!$ modos), você não muda a divisão em grupos.

A resposta é $\dfrac{C_{20}^{3}C_{17}^{3}C_{14}^{3}C_{11}^{3}C_{8}^{4}C_{4}^{4}}{4!2!} = 67\,897\,830\,000$.

8. Devemos colocar os 12 times nos 12 lugares de uma matriz 6×2. Note que trocar as linhas entre si, ou trocar em uma linha a ordem dos elementos, não altera a seleção dos jogos.

A resposta é $\dfrac{12!}{6!(2!)^6} = 10\,395$.

Você também poderia pensar assim: Tenho 11 modos de escolher o adversário do Botafogo; depois tenho 9 modos de escolher o adversário do primeiro (em ordem alfabética) time que sobrou; depois tenho 7 ...

A resposta é $11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 10\,395$.

9. a) Para descobrir o lugar do 62 417 você tem que contar quantos números o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1 $(4! = 24)$, em 2 $(4! = 24)$, em 4 $(4! = 24)$, em 61 $(3! = 6)$ e em 621 $(2! = 2)$. Antecedem-no $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80$ números. Ele ocupa o 81º lugar.

b) Vamos contar os números (mas não um a um, naturalmente)

Começados por	Quantidade	Acumulado
1	4!=24	24
2	4!=24	48
41	3!=6	54
42	3!=6	60
46	3!=6	66

0 66º número escrito é o último (ou seja, o maior) dos começados por 46.

A resposta é 46 721.

c) $166 = 5 \times 33 + 1$.

Portanto, para escrever 166 algarismos, devemos escrever 33 números completos e mais um algarismo.

O 166º algarismo escrito é o 1º algarismo do 34º número.

Os $4! = 24$ primeiros números começam em 1 e os 23 seguintes começam em 2. O 34º número começa em 2.

A resposta é 2.

d) A soma das unidades dos números é $(1 + 2 + 4 + 6 + 7) \cdot 4! = 480$, pois cada um dos algarismos 1, 2, 4, 6, 7 aparece como algarismo das unidades em 4! números. Analogamente, a soma das dezenas é 480 dezenas, ou seja, 4 800. A das centenas é 48 000, a das unidades de milhar é 480 000 e a das dezenas de milhar é 4 800 000.

A resposta é $480 + 4\,800 + 48\,000 + 480\,000 + 4\,800\,000 = 5\,333\,280$.

Um truque, bonito mas truque, é grupar os $5! = 120$ números em 60 casais do seguin modo: o cônjuge de cada número é o número que dele se obtém trocando a posição do 1 com o 7 e a posição do 2 com o 6. Teremos 60 casais e a soma em cada casas é 88 888. A resposta é $88\,888 \times 60 = 5\,333\,280$.

10. Há $m!$ modos de escolher a ordem das moças. Feito isso, devemos arrumar em fila $r+1$ objetos, os r rapazes e o bloco das moças, o que pode ser feito de $(r+1)!$ modos. A resposta é $m!(r+1)!$.

11. a) Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é $6! = 720$.

b) Agora, quando mudamos o cubo de posição obtemos o mesmo dado. Por exemplo, considere um dado com o 1 e o 6 em faces opostas. Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era diferente de colocar o 6 em cima e o 1 embaixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Para determinar esse número, repare que há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um cubo é $6 \times 4 = 24$. A resposta é $\frac{720}{24} = 30$.

Podemos também pensar diretamente: Todo dado pode ser imaginado com o 1 na face de baixo; se o 1 estiver em outro lugar, sempre se poderá virar o dado para que o 1 fique em baixo.

Há 5 modos de escolher o número que ficará na face oposta ao 1, ou seja, na face de cima; digamos que se tenha escolhido o 6 para a face de cima. Agora devemos colocar os números 2, 3, 4 e 5 nas 4 faces restantes: frontal, traseira, direita e esquerda. O 2 sempre poderá ser imaginado na face da frente; se o 2 estiver em outra face, basta rodar o dado para que o 2 fique na face da frente.

Há 3 modos de escolher o número que ficará na face oposta a 2, ou seja, na face de trás; digamos que tenhamos escolhido o 4 para a face de trás. Note que agora não há mais movimentos possíveis para o dado: qualquer movimento ou tirará o 1 de baixo ou tirará o 2 da frente.

Agora temos que colocar o 3 e o 5 nas faces direita e esquerda, o que pode ser feito de 2 modos distintos.

A resposta é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

c) Todo dado pode ser imaginado com o 1 em baixo, o que obriga a colocação do 6 em cima. O 2 sempre pode ser posto na face da frente, o que obriga a colocação do 5 na face de trás. Agora temos que colocar o 3 e o 5 nas faces direita e esquerda, o que pode ser feito de 2 modos distintos. A resposta é 2.

12. Tetraedro: Há 4 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um tetraedro é $4 \times 3 = 12$.

A resposta é $\dfrac{4!}{12} = 2$.

Octaedro: Há 8 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um octaedro é $8 \times 3 = 24$.

Você também poderia imaginar o octaedro com um vértice em baixo. Há 6 modos de escolher o vértice que fica em baixo e 4 modos de escolher, dentre as arestas que o contêm, a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um octaedro é $6 \times 4 = 24$.

A resposta é $\dfrac{8!}{24} = 1\,680$.

Dodecaedro: Há 12 modos de escolher a face que fica em baixo e 5 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um dodecaedro é $12 \times 5 = 60$.

A resposta é $\dfrac{12!}{60} = 7\,983\,360$.

Icosaedro: Há 20 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um icosaedro é $20 \times 3 = 60$.

A resposta é $\dfrac{20!}{60}$ ·

13. $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \dfrac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90\,720$.

14. C_n^p .

15. Há $C_8^4 = 70$ modos de escolher as matérias para o primeiro dia e, depois disso, um só modo de escolher as do segundo dia. A resposta é $70 \times 1 = 70$.

16. Os segmentos que ligam dois vértices são diagonais, arestas ou diagonais de faces. Portanto o número de diagonais é o número de combinações de classe 2 dos vértices menos as arestas menos as diagonais das faces.

a) O octaedro regular é formado por 8 faces triangulares e possui 6 vértices e 12 arestas. Como não há diagonais de faces, a resposta é $C_6^2 - 12 = 15 - 12 = 3$.

b) O icosaedro regular é formado por 20 faces triangulares e possui 12 vértices e 30 arestas. Como não há diagonais de faces, a resposta é $C_{12}^2 - 30 = 66 - 30 = 36$.

c) O dodecaedro regular é formado por 12 faces pentagonais e possui 20 vértices e 30 arestas. Como cada face possui $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ diagonais e são 12 faces, há $5 \times 12 = 60$ diagonais de faces. A resposta é $C_{20}^2 - 30 - 60 = 190 - 90 = 100$.

d) O cubo é formado por 6 faces quadradas e possui 8 vértices e 12 arestas. Como cada face possui 2 diagonais e são 6 faces, há $6 \times 2 = 12$ diagonais de faces. A resposta é $C_8^2 - 12 - 12 = 28 - 24 = 4$.

e) O prisma hexagonal é formado por 6 faces quadrangulares e duas faces hexagonais e possui 12 vértices e 18 arestas. Como cada face quadrangular possui 2 diagonais e cada face hexagonal possui $\frac{6(6-3)}{2} = 9$ diagonais, há $6 \times 2 + 2 \times 9 = 30$ diagonais de faces. A resposta é $C_{12}^2 - 18 - 30 = 66 - 48 = 18$.

   Também se poderia pensar assim: Chamando as faces hexagonais de A e B, as diagonais ligam um vértice de A a um vértice de B. Há 6 modos de escolher o vértice de A e, depois disso, 3 modos de escolher o vértice de B. A resposta é $6 \times 3 = 1$.

17. A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem, o que pode ser feito de C_n^m modos. Com efeito, escolhidos os elementos que formarão a imagem, a função está determinada pois $f(1)$ deve ser igual ao menor dos elementos escolhidos, $f(2)$ deve ser igual ao menor dos elementos restantes, etc.

A resposta é C_n^m.

18. Ignore o problema do 0 na primeira casa. A escolha dos lugares para os 4 pode ser feita de $C_7^3 = 35$ modos; depois disso, a escolha dos lugares para os 8 pode ser feita de $C_4^2 = 6$ modos; as casas restantes podem ser preenchidas de $8 \times 8 = 64$ modos, o que daria para resultado $35 \times 6 \times 64 = 13\,440$. Devemos descontar os números começado em 0. Para formar um número começado em 0, devemos escolher os lugares para os 4 ($C_6^3 = 20$ modos), para os 8 ($C_6^2 = 3$ modos) e preencher a casa restante (8 modos). Há $20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados em 0. A resposta é $13\,440 - 480 = 12\,960$.

19.

a) Basta escolher os $p-1$ companheiros de a_1 dentre os $n-1$ demais elementos. A resposta é C_{n-1}^{p-1}.

b) Basta escolher os p elementos dentre os $n-1$ elementos diferentes de a_1. A resposta é C_{n-1}^{p}.

   Também se poderia fazer o total das combinações e delas subtrair aquelas das quais o elemento a_1 participa, obtendo a resposta $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

c) Basta escolher os $p-2$ companheiros de a_1 e a_2 dentre os $n-2$ demais elementos. A resposta é C_{n-2}^{p-2}.

d) Há C_{n-1}^{o-1} combinações em que o elemento a_1 figura e C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_2 figura. Somando, teremos contado duas vezes as C_{n-2}^{p-2} combinações que contêm a_1 e a_2. A resposta é $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$.

   Também se poderia fazer o total de combinações C_n^p e excluir as C_{n-2}^{p} que não contêm nem a_1 nem a_2. A resposta é $C_n^p - C_{n-2}^{p}$.

Também se poderia somar as combinações que contêm a_1 mas não a_2 (C_{n-2}^{p-1}), com as que contêm a_2 mas não a_1, com as que contêm ambos (C_{n-2}^{p-2}). A resposta é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

e) Há C_{n-2}^{p-1} combinações que contêm a_1 mas não a_2 e C_{n-2}^{p-1} combinações que contêm a_2 mas não a_1. A resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

Também se poderia contar as combinações que contêm pelo menos um dos dois elementos e descontar as que contêm ambos, obtendo a resposta $2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}$ ou $C_n^p - C_{n-2}^p - C_{n-2}^{p-2}$ ou $2C_{n-2}^{p-1}$.

20.

a) Essas funções são bijetoras. A resposta é $n!$.

b) Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias. Há n modos de escolher aquele elemento de B e C_{n+1}^2 modos de escolher sua imagem inversa. Agora sobram $n-1$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles, que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-1)!$ modos. A resposta é $n \cdot C_{n+1}^2 \cdot (n-1)! = \dfrac{n \cdot (n+1)!}{2}$.

c) Há duas possibilidades: um elemento de B tem sua imagem inversa formada por três elementos e os demais têm imagens inversas unitárias ou dois elementos de B têm imagens inversas formadas por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

No primeiro caso há n modos de escolher o elemento de B e C_{n+2}^3 modos de escolher sua imagem inversa. Agora sobram $n-1$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles, que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-1)!$ modos.

No segundo caso há C_n^2 modos de escolher os dois elementos de B e $C_{n+2}^2 \cdot C_n^2$ modos de escolher suas imagens inversas. Agora sobram $n-2$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles, que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-2)!$ modos. A resposta é

$$\begin{aligned} n\cdot\ & C_{n+2}^{3}\cdot(n-1)! + C_{n}^{2}\cdot C_{n+2}^{2}\cdot C_{n}^{2}\cdot(n-2)! = \\ &= \frac{n\cdot(n+2)!}{6} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n+2)!}{8} = \\ &= \frac{n\cdot(3n+1)\cdot(n+2)!}{24}. \end{aligned}$$

21. O número de modos de escolher 3 dos 20 pontos é $C_{20}^{3} = 1\,140$. Assim, o plano determinado pelos 8 pontos é contado $C_{8}^{3} = 56$ vezes. A resposta é $1\,140 - 55 = 1\,085$.

Poder-se-ia também contar separadamente os planos determinados por três dentre os doze pontos ($C_{12}^{3} = 220$), por dois dentre os doze e um dentre os oito ($C_{12}^{2}\cdot 8 = 528$), por um dentre os doze e dois dentre os oito ($12\cdot C_{8}^{2} = 336$) e por três dentre os oito (1 plano apenas). A resposta é $220 + 528 + 336 + 1 = 1\,085$.

22. Escolhida a ordem em que cada casal vai se sentar (marido à direita, mulher à esquerda ou vice-versa), o que pode ser feito de $2\times 2\times 2 = 8$ modos, você tem que formar uma fila (de 7 lugares) com 3 casais e 4 lugares vazios. Há 7 modos de colocar o primeiro casal, 6 de colocar o segundo e 5 de colocar o terceiro. A resposta é $8\times 7\times 6\times 5 = 1\,680$.

23. Vamos arrumar primeiramente apenas as vogais, o que pode ser feito de $\frac{6!}{3!\,1!\,1!\,1!} = 120$ modos, e depois entremear as consoantes.

Se as vogais estiverem, por exemplo, na ordem __ A __ A __ U __ A __ I __ O __, haverá 7 possibilidades para a colocação do P, 6 para o R e 5 para o G.

A resposta é $120\times 7\times 6\times 5 = 25\,200$.

24. Marque, no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, com o sinal $+$ os elementos selecionados para o subconjunto e com o sinal $-$ os elementos não selecionados. Você tem que formar uma fila com p sinais $+$

e $n-p$ sinais $-$, sem que haja dois sinais $+$ adjacentes. Faça uma fila com os sinais $-$ (um único modo) e entremeie os sinais $+$. Há $n-p+1$ espaços entre os sinais $-$ (e antes do primeiro e depois do último) dos quais devemos selecionar p para colocar os sinais $+$, o que pode ser feito de C^p_{n-p+1} modos. A resposta é C^p_{n-p+1}.

25. a) Um grupo de 4 cientistas, $ABCD$, é barrado por pelo menos um cadeado. Na situação do número mínimo de cadeados, por exatamente um cadeado. Batizemos esse cadeado de $ABCD$. A, B, C e D não têm a chave desse cadeado e todos os outros cientistas a têm. Como a correspondência entre os cadeados e seus nomes é um-a-um, basta contar quantos são os nomes dos cadeados, $C^4_{11} = 330$.

b) Cada cientista possui as chaves dos cadeados que não o contêm no nome, $C^4_{10} = 210$.

Você também poderia pensar que há 330 cadeados e de cada cadeado há 7 cópias de chaves. O total de chaves é $330 \times 7 = 2\,310$. Cada cientista possui $2\,310 \div 11 = 210$ chaves. Observe que neste raciocínio partimos do fato de que todos os cientistas têm o mesmo número de chaves.

26. Um bom nome para o professor que pertence às bancas 1 e 2 é professor $1-2$. O número de professores é $C^2_8 = 28$. Em cada banca há 7 professores.

27. Há $4! = 24$ modos de formar uma roda com as meninas. O primeiro menino pode ser posto na roda de 5 modos; o segundo, de 4, etc. A resposta é $24 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2\,880$.

28. O número de rodas que podem ser formadas sem a participação de Vera é $4! = 24$. Há 3 modos de colocar Vera na roda. A resposta é $24 \times 3 = 72$.

29. Chamando x de $1+a$, y de $1+b$ e z de $1+c$, você tem de determinar soluções inteiras e não-negativas para $a+b+c=4$. A resposta é $CR^4_3 = C^4_6 = 15$.

30. Defina, para cada solução, a folga, que é a diferença entre o valor máximo que $x+y+z$ poderia atingir e o valor que $x+y+z$ realmente atinge. Por exemplo, a solução $x=1,\ y=2,\ z=1$ tem folga 2. Cada solução da inequação $x+y+z \leq 6$ corresponde a uma solução da equação $x+y+z+f=6$ e vice-versa. A resposta é $CR_4^6 = C_9^6 = 84$.

31. $CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10\,626$.