Soluções dos Problemas do Capítulo 5

1. Divida o cubo unitário em d^3 cubinhos de aresta $\frac{1}{d} \cdot$ O volume de cada um é $\frac{1}{d^3} \cdot$

Dividindo as arestas de comprimentos $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ e $\frac{c}{d}$ respectivamente em a, b e c segmentos iguais a $\frac{1}{d}$ e traçando pelos pontos de divisão planos paralelos às faces, o bloco ficará dividido em abc cubinhos justapostos. O volume do bloco será então

$$V = abc \cdot \frac{1}{d^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d} \, .$$

2. Quando multiplicamos apenas uma dimensão do bloco por um número natural n, o volume fica multiplicado por n, ou seja, o novo bloco é formado por n blocos justapostos iguais ao inicial. Isto mostra que o volume do bloco retangular é proporcional a qualquer uma de suas dimensões.

Seja $V(x, y, z)$ o volume do bloco retangular cujas arestas medem x, y e z. Pelo teorema fundamental da proporcionalidade tem-se, para todo número real positivo c,

$$V(cx, y, z) = V(x, cy, z) = V(x, y, cz) = c \cdot V(x, y, z).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V(x \cdot 1, y, z) = x \cdot V(1, y, z) = \\ &= x \cdot V(1, y \cdot 1, z) = xy \cdot V(1, 1, z) = xy \cdot V(1, 1, z \cdot 1) = \\ &= xyz \cdot V(1, 1, 1) = xyz \cdot 1 = xyz. \end{aligned}$$

3. Esta definição significa que:

a) Para todo poliedro retangular P contido em S, $\nu(P) \leq V$.

b) Para todo número real $r < V$, é possível encontrar um poliedro retangular Q, contido em S, tal que $r < v(Q) \leq V$.

4. A razão de semelhança entre o brigadeiro grande e o pequeno é $k = \dfrac{R}{R/2} = 2$. A razão entre os volumes é $k^3 = 2^3 = 8$.

5. A razão de semelhança entre a estátua pequena e a grande é $k = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3} \cdot$ Supondo naturalmente que os objetos sejam maciços, a massa é proporcional ao volume. Logo, a razão entre as massas é igual à razão dos volumes, ou seja, $k^3 = \dfrac{8}{27} \cdot$ Temos então:

$$\frac{120}{M} = \frac{8}{27} \Rightarrow M = 405g.$$

6. Seja P um prisma cuja base está sobre um plano horizontal H. Sejam A a área da base e h a altura de P (Figura 72).

Sobre o plano horizontal construa um retângulo de área A e, em seguida, um bloco retangular B, com altura h e tendo este retângulo como base.

Ora, qualquer plano paralelo a H secciona P segundo um polígono congruente à sua base e secciona B segundo um retângulo congruente à sua base.

Como as bases dos dois sólidos têm, por construção, mesma área, então as áreas das duas seções são iguais. Concluímos então pelo Princípio de Cavalieri que

$$v(P) = v(B) = Ah.$$

7. Na Figura 73, o prisma ficou dividido nos tetraedros: $A'B'C'A$, $ACC'B'$, $ACC'B'$ e $ABCC'$.

$V_1 = V_3$ pois as bases $A'B'C'$ e ABC são congruentes e as alturas (distância de A ao plano $A'B'C'$ e distância de B' ao plano ABC) são iguais.

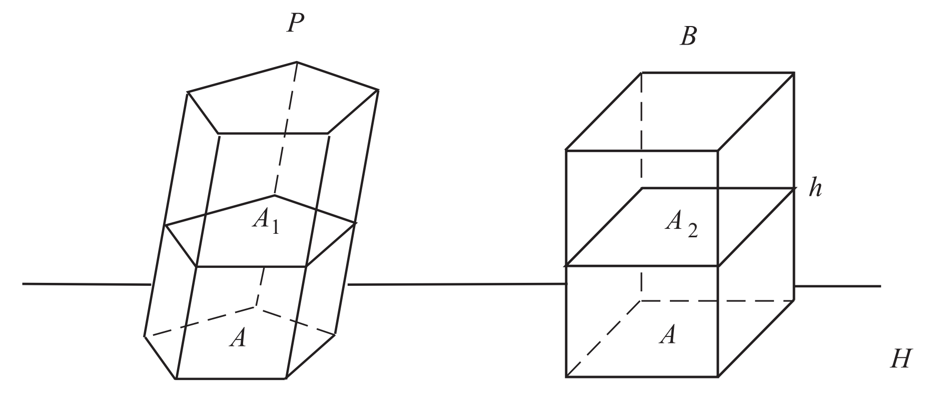

Figura 72. $A_1 = A = A_2$

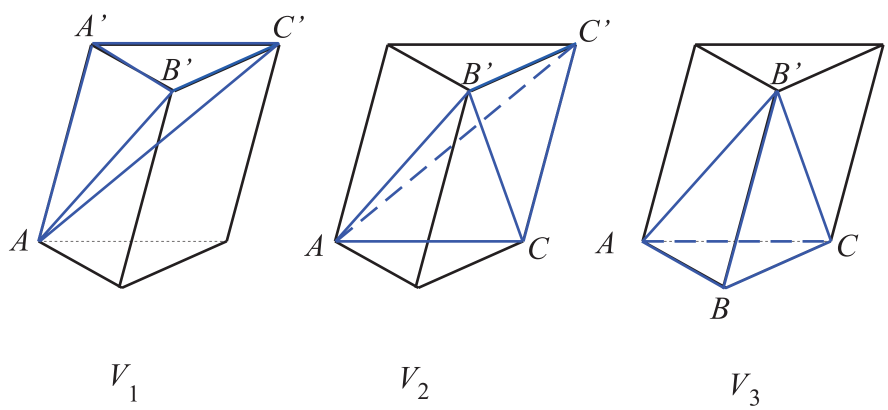

Figura 73

$V_1 = V_2$ pois as bases $AA'C'$ e ACC' são congruentes e a altura (distância de B' ao plano $ACC'A'$) é a mesma.

Logo, $V_1 = V_2 = V_3$.

8. Considere o prisma triangular do exercício anterior. Sendo S a área do triângulo ABC e h a altura do prisma, seu volume é Sh.

O volume da pirâmide $ABCB'$ que tem a mesma base do prisma e a mesma altura do prisma tem volume $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, ou seja, $\frac{1}{3}Sh$.

Uma pirâmide qualquer pode ser dividida em pirâmides triangulares de mesma altura da pirâmide dada. Basta dividir a base da pirâmide em triângulos, como mostra a Figura 74.

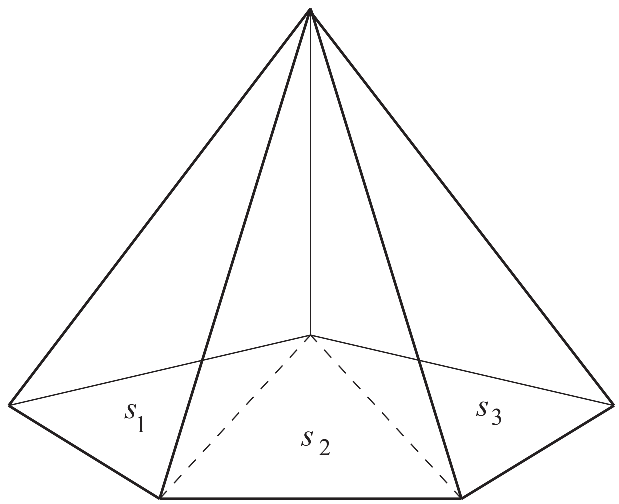

Figura 74

Seja S a área da base da pirâmide e h sua altura. Dividindo a base em triângulos de áreas $S_1, \ldots, S_n$ com $S_1 + \cdots + S_n = S$, temos para o volume da pirâmide qualquer,

$$V = \frac{1}{3}\,S_1h + \frac{1}{3}\,S_2j + \cdots + \frac{1}{3}\,S_nh = \frac{1}{3}\,Sh.$$

9. Em um cilindro, qualquer seção paralela à base é congruente com a base. Usando o mesmo argumento do exercício 6 e o Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume de qualquer cilindro é o produto da área da base pela altura.

Sendo h a altura e R o raio da base, o volume será $\pi R^2 h$.

10. Considere a base do cone sobre um plano horizontal H. Construa no plano H um triângulo de área $S = \pi R^2$ e em seguida, uma pirâmide de altura h com base neste triângulo (Figura 75). Um plano paralelo a H distando $h - x$ de H corta os dois sólidos produzindo seções de áreas S_1 e S_2. Cada seção é semelhante à respectiva base e a razão de semelhança entre a seção e a base é x/h.

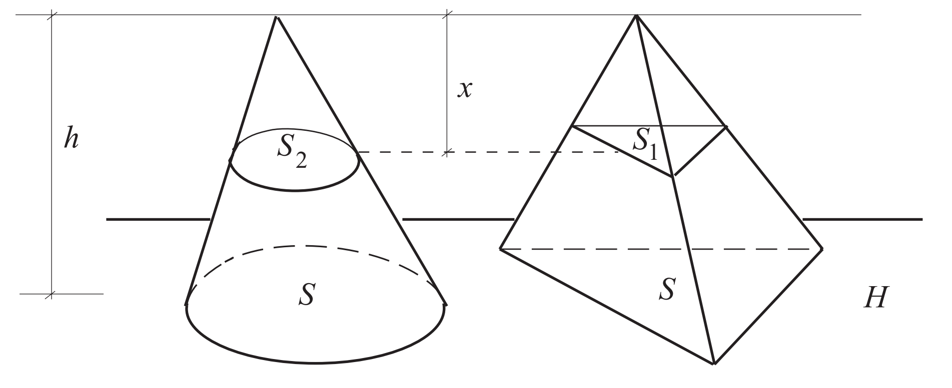

Figura 75

Como a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança temos:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \frac{S_2}{S}$$

e portanto $S_1 = S_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, o cone e a pirâmide têm mesmo volume. O volume do cone é então a terça parte do produto da área da base pela altura.

11. Considere um cone de raio R e altura x (Figura 76). Um plano paralelo à base formou um cone menor, semelhante ao primeiro, com raio r e altura y. Seja h a distância entre os dois planos paralelos.

O volume do tronco de cone é a diferença entre os volumes desses dois cones, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\,\pi R^2 x - \frac{1}{3}\,\pi r^2 y \\ &= \frac{\pi}{3}\,[R^2(h+y) - r^2 y] \\ &= \frac{\pi}{3}\,(R^2 h + R^2 y - r^2 y) \\ &= \frac{\pi}{3}\,[R^2 h + y(R^2 - r^2)] \end{aligned}$$

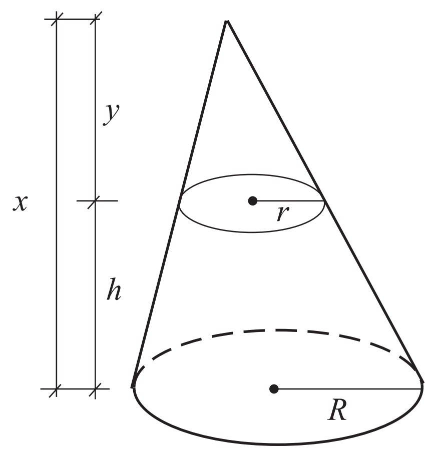

Figura 76

mas, $\dfrac{R}{x} = \dfrac{r}{y} = \dfrac{R-r}{h}$, ou seja, $y = \dfrac{rh}{R-r}$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\left[R^2h + \frac{rh}{R-r}\,(R^2 - r^2)\right] \\ &= \frac{\pi}{3}\,[R^2h + rh(R+r)] \\ &= \frac{\pi h}{3}\,[R^2 + r^2 + Rr]. \end{aligned}$$

12. Os copos comuns de plástico que tenho em mãos possuem as seguintes dimensões em cm:

$2R$	$2r$	h
6,6	4,8	8,0
4,8	3,4	3,6

Os volumes são:

$$V_1 = \frac{\pi - 8}{3}\,(3{,}3^2 + 2{,}4^2 + 3{,}3 \cdot 2{,}4) \cong 205{,}7\,\text{cm}^3$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 3{,}6}{3}\,(2{,}4^2 + 1{,}7^2 + 2{,}4 \cdot 1{,}7) \cong 48\,\text{cm}^3$$

e a razão é $\dfrac{205{,}7}{48} \cong 4{,}3$.