Soluções dos Problemas do Capítulo 4

Problema 1

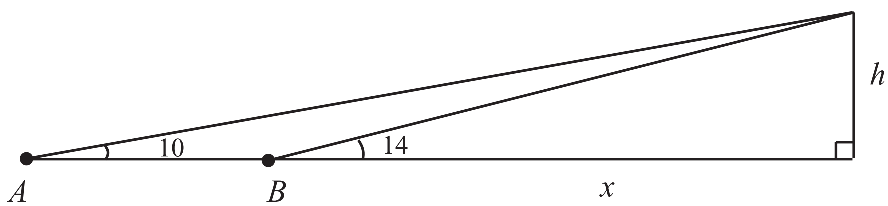

Figura 57

Seja h a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano horizontal de medição e seja x a distância de B ao pé da altura (Figura 57). Nos dois triângulos retângulos formados no plano vertical temos:

$$\frac{h}{x} = \operatorname{tg} 14^\circ = 0{,}2493$$
$$\frac{h}{650 + x} = \operatorname{tg} 10^\circ = 0{,}1763$$

Resolvido este sistema, obtemos $h = 391{,}4$.

Problema 2

Aplicando a lei dos senos no triângulo ABP (Figura 58) temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 9^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 52^\circ} \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{0{,}7880}{0{,}1564} = 5{,}04.$$

Problema 3

É fácil calcular os seguintes ângulos (Figura 59):

$$A\widehat{X}B = 18^\circ \quad \text{e} \quad A\widehat{Y}B = 6^\circ$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo XAB temos:

$$\frac{XA}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 18^\circ},$$

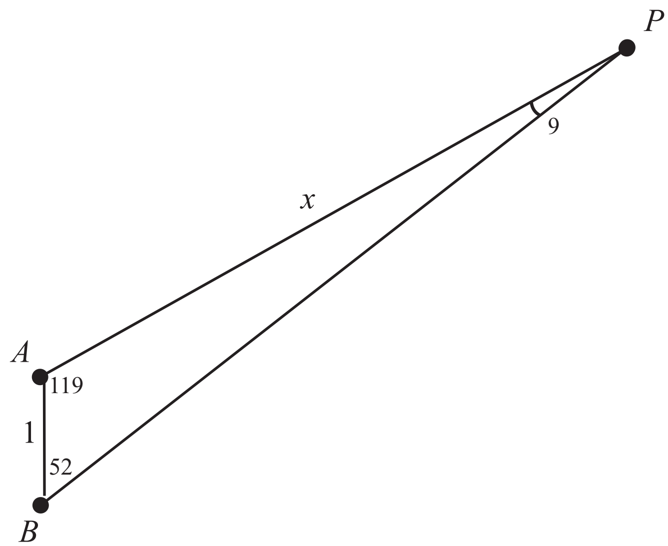

Figura 58

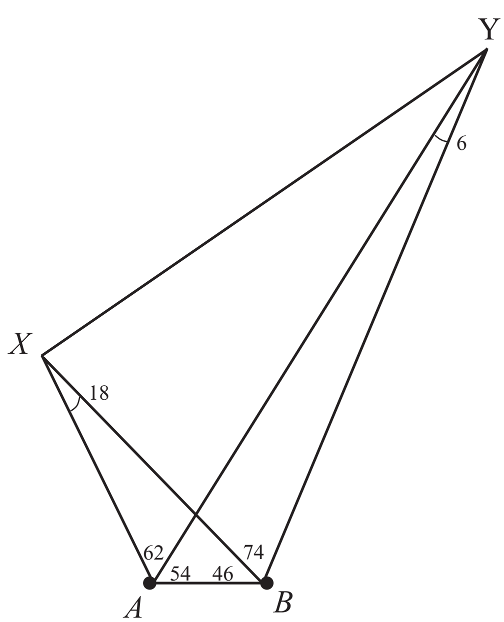

Figura 59

o que fornece $XA = 1{,}328$. Sendo $A\widehat{B}Y = 120^\circ$, novamente a lei dos senos fornece:

$$\frac{YA}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 6^\circ},$$

o que dá $YA = 8{,}285$. No triângulo AXY usamos agora a lei dos cossenos:

$$XY^2 = XA^2 + YA^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot \cos(X\widehat{A}Y)$$

e os cálculos indicam $XY = 7{,}48$.

Problema 4

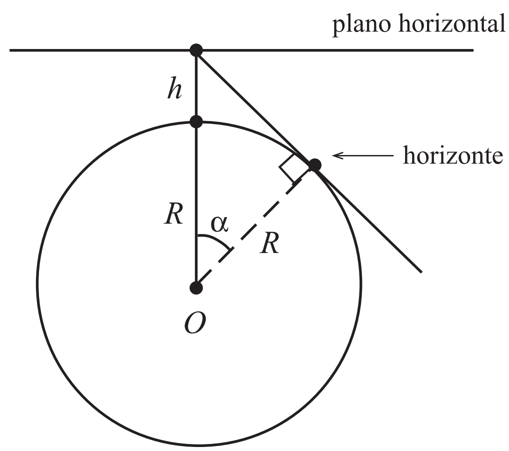

Figura 60

Observando a Figura 60, vemos que o ângulo α entre a horizontal e a linha de visada ao horizonte, aparece também no centro da Terra. Daí,

$$\cos\alpha = \frac{R}{h + R}$$

e, portanto,

$$R = \frac{h\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\,.$$

Para $h = 0{,}703\,\text{km}$ e $\alpha = 0{,}85^\circ$ encontra-se $R = 6633\,\text{km}$.

O raio médio da Terra é de cerca de 6 370 km. O resultado encontrado é bastante razoável.

Problema 5

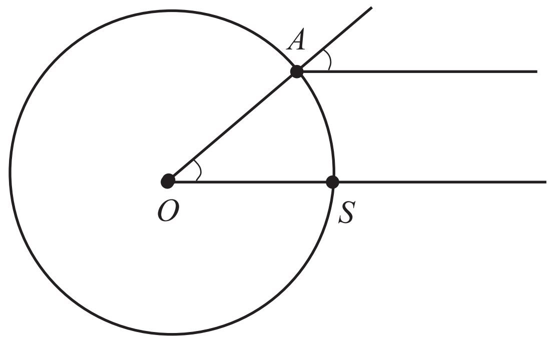

Figura 61

Se $\alpha = \dfrac{360°}{50}$ então o comprimento da circunferência da Terra é 50 vezes o comprimento do arco SA, ou seja 250 000 estádios ou 40 250 km. Daí, $R = \dfrac{40250}{2\pi} = 6409\,\text{km}$, um resultado muito bom.

Problema 6

1) Os comprimentos de AC e BC são proporcionais respectivamente a 8 e 9 (Figura 62). Daí, pela lei dos senos,

$$\frac{9k}{\text{sen}\,110°} = \frac{8k}{\text{sen}\,\theta}$$

Encontramos $\text{sen}\,\theta = 0{,}835$ e como θ é um ângulo agudo, tem-se $\theta = 56{,}6°$.

2) Veja a Figura 63.

$$\frac{8{,}1}{\text{sen}\,110°} = \frac{8}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \theta = 68{,}14°$$

Logo, $A\widehat{C}B = 1{,}86°$.

$$\frac{BC}{\text{sen}\,110°} = \frac{50}{\text{sen}\,1{,}86°} \Rightarrow BC = 1448\,\text{m}.$$

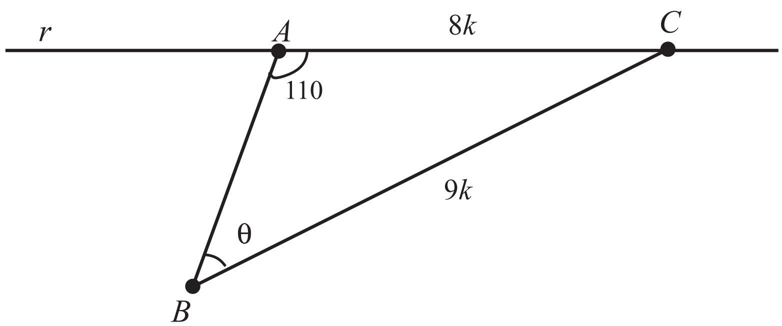

Figura 62

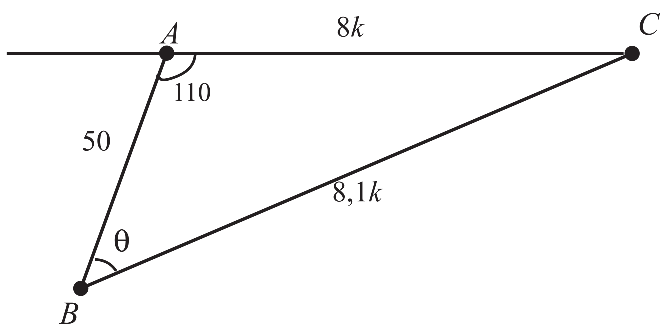

Figura 63

Problema 7

Como a velocidade de A é 15% maior que a de B, então os lados BC e AC do triângulo são respectivamente proporcionais a 1 e 1,15 (Figura 64). Daí,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1{,}15}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0{,}99593.$$

Mas, isto fornece $\theta = 84{,}8^\circ$ ou $\theta = 180^\circ - 84{,}8^\circ = 95{,}2^\circ$.

Por que há duas respostas?

Imagine a seguinte situação. Os vértices A e B do triângulo ABC são fixos e a razão entre os lados CA e CB é constante (Figura 65).

Vamos mostrar que nestas condições o lugar geométrico de C é uma circunferência.

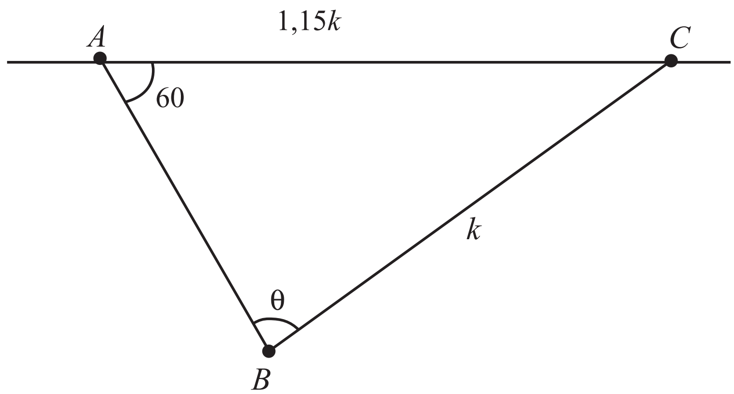

Figura 64

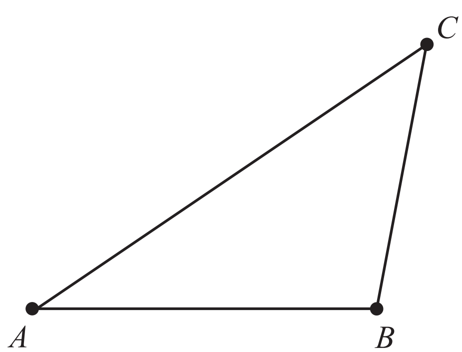

Figura 65. $\frac{CA}{CB} = r$, constante. Qual é o lugar geométrico do vértice C?

Dividamos o segmento AB harmonicamente na razão r. Isto significa encontrar os pontos M e N da reta AB, um interior ao segmento AB e outro exterior, tais que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = r.$$

Como $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB}$, então CM é bissetriz do ângulo interno C do triângulo ABC (recorde o teorema das bissetrizes e sua recíproca).

Como $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{CA}{CB}$, então CN é bissetriz do ângulo externo C do triângulo ABC (Figura 66).

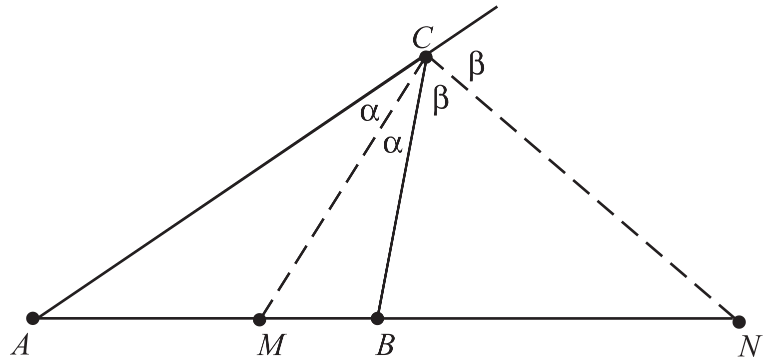

Figura 66

Ora, os pontos M e N são fixos e o ângulo MCN é reto. Logo, C está sobre a circunferência de diâmetro MN (Figura 67).

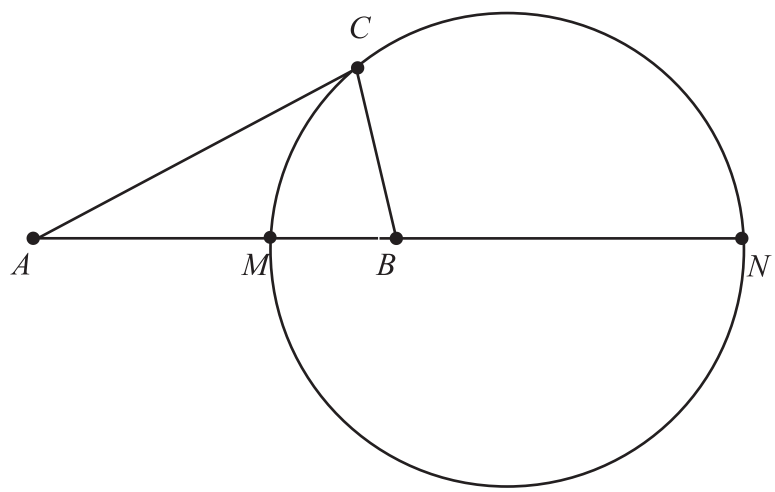

Figura 67

Este lugar geométrico chama-se "circunferência de Apolônio" do segmento AB na razão r.

Voltemos então ao problema.

Se A e B são fixos e $\dfrac{CA}{CB} = 1{,}15$ então C está na circunferência de Apolônio do segmento AB e nessa razão. Como C está na reta r, então a solução é a interseção dessas duas figuras.

No nosso problema, há dois pontos possíveis para o encontro: C ou C'. Os ângulos calculados foram $ABC = 84{,}8°$ e $ABC' = 95{,}2°$. (Figura 68).

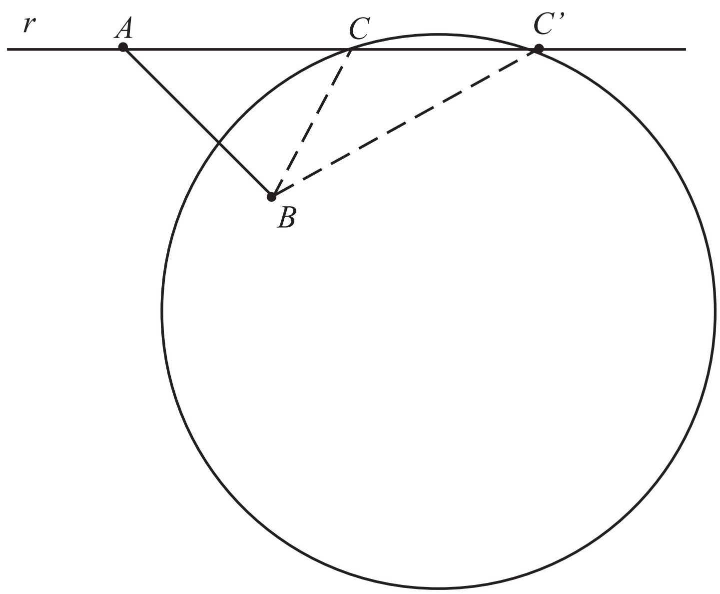

Figura 68

Problemas suplementares

1. Se as velocidades forem iguais então os corredores percorrerão distâncias iguais. Se $\alpha = BAC$ é agudo então C é a interseção da mediatriz de AB com r. Se α é reto ou obtuso, não há solução.

2. No triângulo ABC, os lados AC e BC são respectivamente proporcionais a 9 e v. Daí, pela lei dos senos,

$$\frac{9}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{v}{\operatorname{sen} 50°} \qquad \text{donde} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{9 \cdot \operatorname{sen} 50°}{v} \leq 1.$$

Daí, $v \geq g \cdot \operatorname{sen} 50°$, ou seja, $v \geq 6{,}89 m/s$. Note que a menor velocidade de B ocorre quando o ângulo ABX é reto.

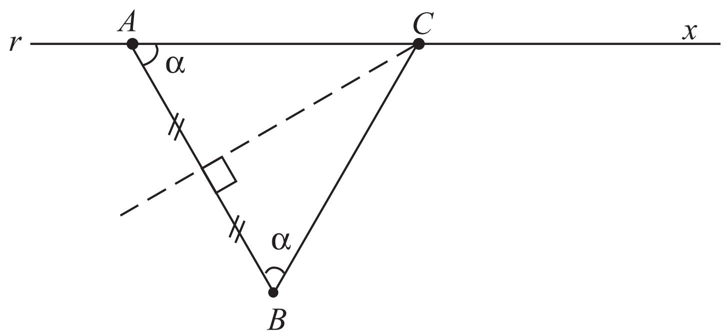

Figura 69

3. Veja a Figura 70. Pela lei dos cossenos,

$$PQ^2 = 1{,}2^2 + 1{,}8^2 - 2 \cdot 1,2 \cdot 1,8 \cdot \cos 27^\circ, \text{ donde } PQ = 911 \text{ m}.$$

Aplicando a lei dos senos,

$$\frac{1{,}8}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{0{,}911}{\operatorname{sen} 27^\circ} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = 0{,}897.$$

Temos então $\alpha = 63{,}8^\circ$ e, conseqüentemente, $\beta = 89{,}2^\circ$.

4. Veja a Figura 71. Como os ângulos PAB e PBA foram medidos, encontramos $APB = 31{,}6^\circ$.

$$\frac{PA}{\operatorname{sen} 77{,}9^\circ} = \frac{660}{\operatorname{sen} 31{,}6^\circ} \Rightarrow PA = 1231{,}6$$

$$h = PA \cdot \operatorname{tg}(CAP) = 1231{,}6 \cdot \operatorname{tg} 29{,}7^\circ = 702{,}5 \text{ m}.$$

O leitor poderá calcular a mesma altura utilizando o triângulo PBC para verificar a exatidão das medidas.

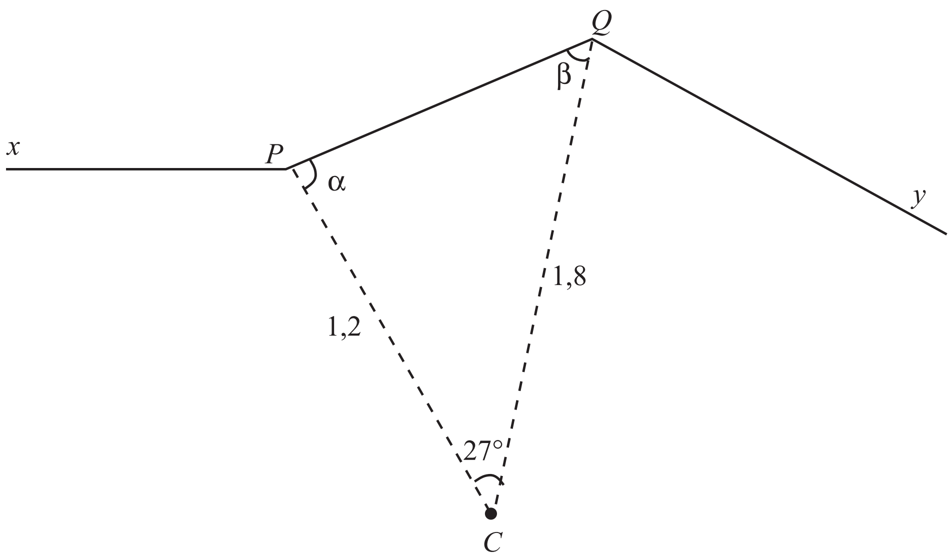

Figura 70

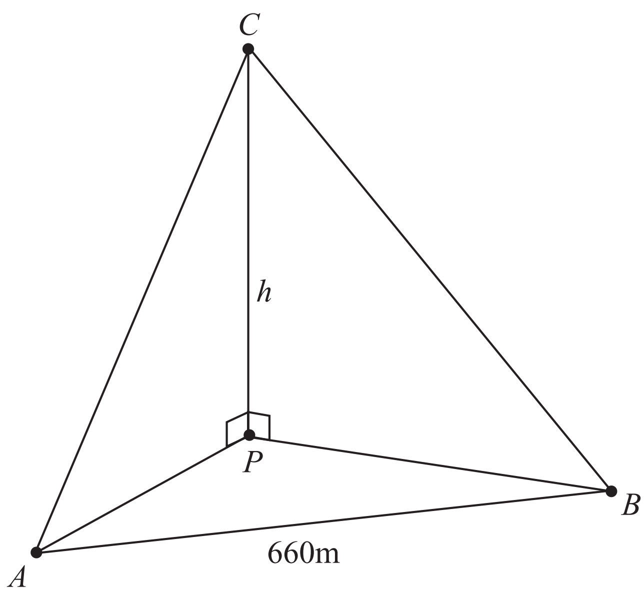

Figura 71