Soluções dos Problemas do Capítulo 3

1. A cada período de 5 anos, a população da cidade é multiplicada por 1,02. Logo, em 20 anos, ela é multiplicada por $1{,}02^4 = 1{,}0824$. Assim, o crescimento estimado é de 0,0824, ou seja, 8,24%.

Está implícito no enunciado do problema, que a população é multiplicada por uma constante em qualquer intervalo de tempo de duração fixa (não necessariamente com a duração de 5 anos). Este é um modelo adequado para crescimento populacional, pois traduz o fato de que o aumento da população, em um certo intervalo de tempo, é proporcional à população no início deste intervalo.

Em conseqüência, a população $p(t)$ no instante t é expressa por uma função do tipo exponencial $p(t) = ba^t$, onde $b = p(0)$ é a população no instante inicial. O valor de a pode ser calculado usando o fato de que, em 5 anos, há um crescimento de 2%. Temos $p(5) = p(0) \times a^5 = p(0) \times 1{,}02$. Portanto, $a = 1{,}02^{\frac{1}{5}}$ e $p(t) = p(0) \times 1{,}02^{\frac{t}{5}}$. Logo, o crescimento relativo em um período de duração t anos é

$$\frac{p(t) - p(0)}{p(0)} = \frac{p(0) \times 1{,}02^{\frac{t}{5}} - p(0)}{p(0)} = 1{,}02^{\frac{t}{5}} - 1.$$

2. O número de bactérias no instante t é da forma $f(t) = ba^t$. Como $f(0) = 1000$, temos $b = 1000$. Como $f(1) = 1500$, temos $1500 = 1000 \cdot a^1$ e, daí, $a = \frac{1500}{1000} = \frac{3}{2}$. Logo, $f(t) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$. Assim, 5 horas após o início do experimento, o número de bactérias será

$$f(5) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \approx 7594 \text{ bactérias.}$$

3. A lei do resfriamento estabelece que a diferença $T - 20$ entre as temperaturas da peça e do ambiente varia, ao longo do tempo, com uma taxa de variação que é proporcional ao seu valor. Isto significa que $T - 20$ é dada por uma função do tipo exponencial do tempo. Ou seja, $T - 20 = ba^t$ ou, equivalentemente,

$T = 20 + ba^t$. Para calcular a e b, usamos as temperaturas observadas nos instantes $t = 0$ e $t = 10$ (estamos escolhendo medir o tempo em minutos). Temos

$20 + ba^0 = 120$, de onde obtemos $b = 100$ e

$20 + 100a^{10} = 80$, de onde obtemos $a^{10} = \frac{60}{100} = 0{,}6$ e, daí, $a = 0{,}6^{\frac{1}{10}}$.

Ou seja, a temperatura T ao longo do tempo é dada por $T = 20 + 100 \cdot 0{,}6^{\frac{t}{10}}$. Após 1 hora (ou seja, para $t = 60$ minutos), a temperatura será

$$T(60) = 20 + 100 \times 0{,}6^{\frac{60}{10}} = 20 + 100 \times 0{,}6^6 \approx 24{,}7.$$

O gráfico da temperatura ao longo do tempo está na Figura 55.

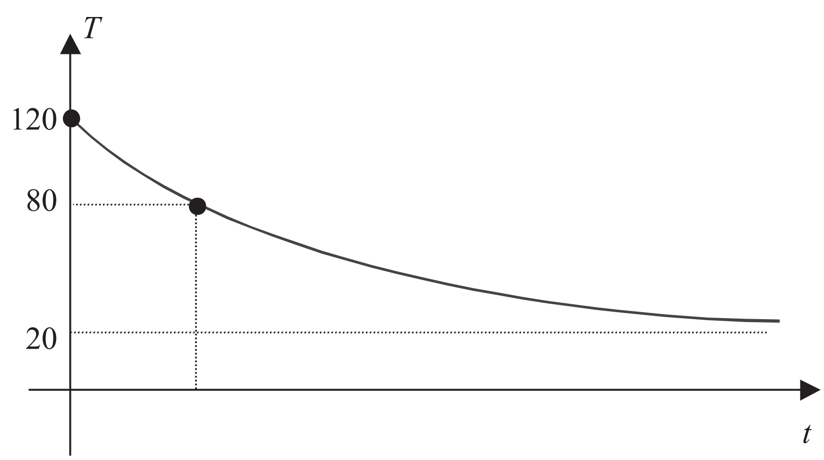

Figura 55

4. A massa de matéria radioativa é dada por $m(t) = m_0 \cdot a^t$, onde m_0 é a massa no instante inicial. Como a meia-vida é 5500 anos, temos $m(5500) = m_0 \cdot a^{5500} = m_0 \cdot \frac{1}{2}$. Logo, $a^{5500} = \frac{1}{2}$ e, portanto, $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5500}}$. Assim, a massa de material radioativo que resta após 10000 anos é

$$m(10000) = m_0 \cdot a^{10000} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10000}{5500}} = m_0 \cdot 0{,}284.$$

Logo, restam 28,4% do material radioativo original.

5. A massa no instante t é $m(t) = m_0 \cdot a^t$. Como $m(1) = 0{,}8m_0$, temos $m_0 \cdot a^1 = 0{,}8m_0$ e, portanto, $a = 0{,}8$. A meia-vida é o tempo em que a massa se reduz à metade. É obtida, portanto, resolvendo a equação $m_0 \cdot 0{,}8^t = m_0 \cdot \frac{1}{2}$, ou seja, $0{,}8^t = 0{,}5$. Assim, $t \log 0{,}8 = \log 0{,}5$ e, daí, $t = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}8}$. Usando, por exemplo, logaritmos na base 10, tem-se

$$t = \frac{-0{,}30103}{-0{,}09691} = 3{,}10628 \text{ anos.}$$

6. Segundo a lei de resfriamento, a diferença $T - 20$ entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente é dada por uma função do tipo exponencial. Assim, $T - 20 = b \cdot a^t$, ou seja, $T = 20 + b \cdot a^t$.

Adotando $t = 0$ como o instante em que a temperatura do corpo foi tomada pela primeira vez e medindo o tempo em horas, temos $T(0) = 34{,}8$ e $T(1) = 34{,}1$.

Assim, temos $20 + b \cdot a^0 = 34{,}8$, o que nos fornece $b = 14{,}8$. Em seguida, $20 + 14{,}8 \cdot a^1 = 34{,}1$, de onde tiramos $a = \frac{14{,}1}{14{,}8}$. Portanto, temos $T = 20 + 14{,}8 \cdot \left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^t$.

Para encontrar o instante da morte, devemos determinar t de modo que $T = 36{,}5$. Ou seja, devemos resolver $36{,}5 = 20 + 14{,}8 \left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^t$. Temos

$$\begin{aligned} 16{,}5 &= 14{,}8 \times \left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^t \\ \frac{16{,}5}{14{,}8} &= \left(\frac{14{,}1}{14{,}8}\right)^t \\ \log 16{,}5 &= t \log \frac{14{,}1}{14{,}8} \end{aligned}$$

Empregando logaritmos na base e, temos $0{,}10873 = -0{,}04845t$, de onde obtemos $t = -2{,}24$.

O sinal negativo indica que o instante em que a temperatura do corpo era de $36{,}5°$ é anterior ao momento da primeira medição.

Assim, a morte ocorreu aproximadamente 2,24 horas, ou seja, 2 horas e 14 minutos antes das 23:30. Isto é, o horário estimado para a morte é 21:16.

7. É necessário, antes de mais nada, interpretar corretamente as informações fornecidas. A taxa de 10% ao mês não implica em que, ao longo de um mês, 10% da água se evapore. O valor dado se refere à taxa instantânea de evaporação. Ou seja, se a água continuasse a se evaporar a uma taxa constante e igual à do instante inicial, 10% da água se evaporaria em um mês. No entanto, a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água existente e é, portanto, decrescente ao longo do tempo.

Como a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água no reservatório, esta é dada por uma função do tipo exponencial. É conveniente expressar esta função na forma $q(t) = q_0 \cdot e^{kt}$, onde q_0 é a quantidade inicial de água no reservatório e k é a constante de proporcionalidade entre a taxa de evaporação e a quantidade de água. O dado do problema é que esta constante de proporcionalidade (logo o valor de k) é igual a $10\% = 0{,}1$ (com o tempo medido em meses). A lei de variação da quantidade de água é, assim, $q(t) = q_0 \cdot e^{-0{,}1t}$.

Para achar o tempo necessário para que a água se reduza à 1/3 de sua quantidade inicial, devemos resolver a equação

$$q_0 \cdot e^{-0{,}1t} = q_0 \cdot \frac{1}{3}.$$

Temos $-0{,}1t = \log_e \frac{1}{3} = -1{,}09861$. Logo, $t = 10{,}9861$, o que indica que a quantidade de água se reduz a 1/3 de seu valor em aproximadamente 11 meses.

8. No problema 4, estabelecemos que a massa de C^{14} ao longo do tempo é dada por $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}}$. Se a radioatividade da amostra hoje é 0,45 da observada em uma amostra viva do mesmo material, temos que o tempo t decorrido entre a época em que o material estava vivo e os dias de hoje satisfaz

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}} = m_0 \cdot 0{,}145.$$

Logo, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}} = 0{,}145$, ou seja, $\frac{t}{5500}\log\frac{1}{2} = \log 0{,}145$.

Utilizando logaritmos na base e:

$$\frac{t}{5500}\cdot(-0{,}69315) = -1{,}93102$$

Portanto, $t \approx 15322$. Logo, as pinturas foram feitas aproximadamente 15000 anos atrás.

9. A lei de variação da quantidade de droga pode ser expressa na forma $q(t) = q_0 \cdot e^{-kt}$, onde q_0 é a quantidade inicial da droga (20 mg) e k é a razão entre a taxa de eliminação e a quantidade de droga. Neste caso,

$$k = \frac{5 \text{ mg/hora}}{20 \text{ mg}} = 0{,}25 \text{ hora}$$

(note a unidade apropriada para k). Assim $q(t) = 20 \cdot e^{-0{,}25t}$.

Para calcular a meia-vida t, resolvemos a equação

$$20 \cdot e^{-0{,}25t} = 20 \cdot \frac{1}{2}$$

Temos:

$$\begin{aligned} e^{-0{,}25t} &= 0{,}5 \\ -0{,}25t &= \log_e 0{,}5 \\ t &= \frac{\log_e 0{,}5}{\log_e 0{,}25} = 2{,}772 \approx \text{ 2 horas e 46 minutos.} \end{aligned}$$

10. Empregar uma escala logarítmica para o eixo Y equivale a representar, para cada valor de x, o par $(x, \log_{10} f(x))$ no plano cartesiano. Logo, o gráfico será uma reta se e somente se os pontos $(x, \log_{10} f(x))$ estão sobre uma reta. Isto ocorre se e só se existem constantes a e b tais que $\log_{10} f(x) = ax + b$, ou seja,

$$f(x) = 10^{ax+b} = 10^b \cdot (10^a)^x = B \cdot A^x,$$

onde $B = 10^b$ e $A = 10^a$.

Na parte b), temos $\log_1 0y = ax + b$, onde os valores de a e b podem ser encontrados com o auxílio de dois pontos do gráfico. Para $x = 0$, temos $y = 10$ e, para $x = 4$, temos $y = 1000$. Logo

$$\begin{aligned} \log_{10} 10 = 1 = a \cdot 0 + b \\ \log_{10} 1000 = 3 = a \cdot 4 + b \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $b = 1$ e $a = \frac{1}{2}$. Logo, $\log_{10} y = \frac{1}{2}x + 1$, ou seja, $y = 10^{\frac{1}{2}x+1} = 10 \cdot \left(\sqrt{10}\right)^x$.

11. Na solução do problema 1, vimos que, ao discretizar o fenômeno segundo intervalos de duração Δt, obtemos:

$$c(t + \Delta t) - c(t) = c(t) \cdot \frac{-v\Delta t}{V + v\Delta t} \,.$$

Logo,

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V + v\Delta t} \,.$$

Portanto, a taxa instantânea de variação obtida tomando o limite quando $\Delta t \to 0$ da expressão acima é igual a $-c(t) \cdot \frac{v}{V}$.

Já no problema 6, vimos que a taxa de variação da quantidade de cloro no instante inicial é igual a -105 g/hora. Logo, $-\frac{v}{V}c(0) = -105$. Como $V = 100$ m^3 e $c(0) = 1000$ g, temos $-\frac{v}{100} \cdot 1000 = -105$ e, portanto, $v = \frac{100 \times 105}{1000} = 10{,}5$ m^3/hora.

12. a) No instante 0, é ingerida uma quantidade q. Imediatamente antes do instante h, a quantidade se reduz a $q/2$. É, então, ingerida uma nova quantidade igual a q, elevando a quantidade de droga para $\frac{q}{2} + q = \frac{3q}{2}$. Ao longo do próximo período de duração h, a quantidade de droga decai segundo a lei $q(t) = \frac{3q}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$, onde t é o tempo decorrido a partir do instante h. Logo, a quantidade de droga existente no instante $\frac{3h}{2} = h + \frac{h}{2}$ é $\frac{3q}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h/2}{h}} = \frac{3q}{2}\sqrt{(2)}$.

b) Basta analisar o que ocorre imediatamente depois da ingestão de cada dose da droga. Entre estes instantes a quantidade de droga decai à metade de seu valor segundo uma função do tipo exponencial.

Seja $q(n)$ a quantidade de droga imediatamente após o instante nh. Temos $q(0) = q$ e $q(n+1) = q(n) \cdot \frac{1}{2} + q$, para todo q (observe que, entre os instantes nh e $(n+1)h$ a quantidade de droga se reduz à metade, mas é acrescida de uma nova dose igual a q).

Assim:

$$q(1) = q \cdot \frac{1}{2} + q$$
$$q(2) = \left(q \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + q = q \cdot \frac{1}{4} + q \cdot \frac{1}{2} + q$$

etc.

É simples provar, por indução, que

$$q(n) = q\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + 1\right) = q \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2q\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right].$$

O valor limite, quando $n \to \infty$, da quantidade $q(n)$ de droga no organismo logo após sua injeção é, portanto igual a $2q$.

O gráfico da Figura 56 mostra o comportamento da quantidade de droga ao longo do tempo.

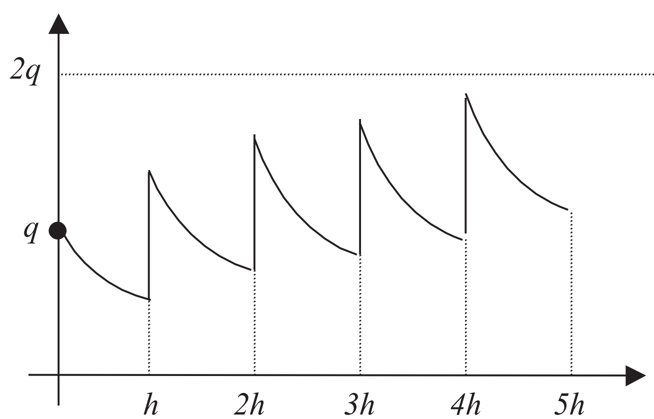

Figura 56