Soluções dos Problemas do Capítulo 1

1. Caso particular do Exemplo 3.

2. Admitindo a fórmula da área de um triângulo, o resultado é imediato. O fator de proporcionalidade é a metade da distância de P a r, que é a medida comum das alturas de todos esses triângulos. Deste modo, o exercício se torna uma conseqüência (indireta) do Exemplo 2, pois a fórmula da área do triângulo resulta da área do retângulo.

3. Seja $f(x,y)$ a área do paralelogramo que tem OX e OY como lados. A prova de que $f(x,y)$ é proporcional a x e y se faz exatamente como no caso do retângulo. A constante de proporcionalidade é $a = f(1,1) =$ (área do losango de lado 1 e ângulos internos α e $180 - \alpha$) $= \operatorname{sen}\alpha$. Portanto $f(x,y) = (\operatorname{sen}\alpha)x \cdot y$. Não é preciso tabela de senos nem calculadora para responder a última pergunta do exercício. Sabendo que $a \cdot 6 \cdot 7 = 29$, obtemos $a = 29/42$. Logo $f(2,3) = (29/42) \cdot 2 \cdot 3 = 29/7$.

4. A verificação de que o volume $f(x,y,z)$ do paralelepípedo que tem OX, OY e OZ como arestas é proporcional a x, y e z, se faz do mesmo modo que no caso do bloco retangular. Tem-se portanto $f(x,y,z) = axyz$, onde o fator de proporcionalidade $a = f(1,1,1)$ é o volume do paralelepípedo cujas arestas medem 1 e estão sobre as semi-retas OA, OB e OC. Se $A\widehat{O}B = \alpha$, $A\widehat{O}C = \beta$ e $B\widehat{O}C = \gamma$ então a é a raiz quadrada do determinante da "matriz de Gram":

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

(Veja "A Matemática do Ensino Médio", vol. 3, pág. 152.) Observe que quando $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ tem-se $a = 1$ e recaímos no volume do bloco retangular.

5. Para todo $t \geq 0$, seja $f(t)$ a abscissa do ponto móvel no instante t. Dizer que o ponto percorre espaços iguais em tempos iguais significa dizer que $f(t+h)-f(t)$, espaço percorrido no intervalo de tempo $[t, t+h]$, depende apenas de h, mas não de t. A constante $v = f(t+1) - f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se a *velocidade* do ponto móvel. Pelo Teorema de Caracterização das Funções Afins, se pusermos $b = f(0) =$ abscissa do ponto de partida, teremos, para todo t, $f(t) = vt + b$, desde que saibamos que f é uma funções crescente (ou decrescente). Do ponto de vista físico, isto significa que o ponto se move sempre no mesmo sentido. Esta condição pode, sem prejuízo algum, ser incluída na definição de movimento uniforme. (Veja também o comentário à pág. 101 do livro "A Matemática do Ensino Médio", vol. 1.) Deve-se notar que a *posição* do móvel no eixo é dada pela função afim $f(t) = vt + b$ porém o *espaço* (*distância*) que ele percorreu é dado pela função linear $e = vt$.

6. A contrapartida algébrica do fato de que por dois pontos distintos do plano passa uma, e somente uma, reta é a proposição segundo a qual, dados x_1, x_2, y_1, y_2 em $\mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f(x) = ax + b$, tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Em palavras: uma função afim fica determinada quando se conhecem seus valores (tomados arbitrariamente) em dois pontos distintos. Esta proposição, que resulta imediatamente da sua versão geométrica acima mencionada, pode ser provada algebricamente observando-se que, dados arbitrariamente x_1, x_2, y_1, y_2, com $x_1 \neq x_2$, o sistema linear

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2, \end{aligned}$$

cujas incógnitas são a e b, possui a solução única

$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \;\text{ e }\; b = (x_2 y_1 - x_1 y_2)/(x_2 - x_1).$$

7. O primeiro (e mais importante) fato a notar para resolver este problema é que o número de dias que dura a ração é inversamente proporcional ao número de vacas a serem alimentadas: quanto mais vacas, menos dura a ração e além disso, se o número de vacas é multiplicado por um número natural n, o número de dias que dura a ração é dividido por n. Passados os primeiros 14 dias, o fazendeiro tinha ainda ração suficiente para alimentar 16 vacas durante $62 - 14 = 48$ dias. Para saber durante quantos dias esta ração poderia alimentar as $12\ (= 16-4)$ vacas restantes, observamos que $12 = 16 \times (3/4)$ logo esse número de dias é $48 \div 3/4 = 64$. Depois de mais 15 dias, a ração que resta dá para alimentar as 12 vacas durante $64 - 15 = 49$ dias. Essa mesma ração é suficiente para alimentar $21 (= 12 + 9)$ vacas durante $49 \div (21/12) = 28$ dias, pois $21 = 12 \times \dfrac{21}{12}$. Totalizando, nas circunstâncias do problema, a ração dura $14 + 15 + 28 = 57$ dias.

8. Este exercício é análogo ao anterior, portanto sua solução segue as mesmas linhas. Ao final de 12 dias de viagem, a caravana tem água suficiente para servir 7 pessoas durante $42 - 12 = 30$ dias. E $10 (= 7 + 3)$ pessoas? Como $10 = 7 \times (10/7)$, a água durará $30 \div (10/7) = 21$ dias. Como ainda faltam 30 dias para o fim da viagem, se for mantido o mesmo consumo diário de água por pessoa, um oásis deve ser encontrado em 21 dias ou menos. Isto responde o item b). Quanto ao item a), a ração diária de água por pessoa também é inversamente proporcional ao número de pessoas. Como $10 = 7 \times (10/7)$, o consumo diário por pessoa numa caravana de 10 pessoas deve ser de $3{,}5 \div (10/7) = 2{,}45$ litros.

9. No eixo orientado AB, tomaremos A como origem das abscissas. Decorridos t horas após a partida, o carro que partiu de A encontra-se no ponto de abscissa $f(t) = vt$, enquanto o que partiu de B tem abscissa $g(t) = wt + d$. Se eles se encontram no tempo t, tem-se $vt = wt + d$, donde $t = \dfrac{d}{v - w}$. Evidentemente, se $v = w$ e $d > 0$ os carros nunca se encontram. Também se $u < w$ não há encontro e, na verdade, a distância $wt + d - vt = (w - v)t + d$ aumenta à medida que passa o tempo.

10. Ao deparar com este problema, a tendência natural é somar as distâncias percorridas pelo pássaro em suas idas e vindas, o que é uma tarefa muito árdua. A solução mais simples consiste em calcular o tempo. Os dois trens se chocam no momento t em que $46t + 58t = 260$, ou seja, após $t = 260/104 = 2$ horas e 30 minutos Este é exatamente o tempo em que o pássaro voou. Portanto ele percorreu $60 \times 2{,}5 = 150$ quilômetros.

11. Após x meses de uso, quem comprou o aparelho na loja A gastou $f(x) = 3800 + 20x$ reais, enquanto quem comprou na loja B gastou $g(x) = 2500 + 50x$. Tem-se $g(x) - f(x) = 30x - 1300$. Logo, para todo $x \geq 1300/30 = 43\frac{1}{3}$, tem-se $g(x) - f(x) \geq 0$. Noutras palavras, após 43 mêses e 10 dias de uso, o aparelho comprado na loja B, que inicialmente era mais barato, torna-se mais caro do que o comprado na loja A.

12. A solução deste exercício é análoga à explicação do Exemplo 3, só que mais simples porque não há necessidade de mostrar que a correspondência $x \mapsto z$ está bem definida. A partir do ponto Z, trace uma semi-reta paralela a OA, contida no interior do ângulo $A\widehat{O}B$. Se X' é um ponto de OA tal que X está entre O e X' (ou seja, $x < x'$) então o segmento $X'Z'$ corta essa paralela num ponto M. (Faça a figura!) Logo $x < x' \Rightarrow z < z'$. Além disso, se $\overline{OX} = \overline{XX'} = x$ então os triângulos OXZ e $Z < Z'$ são congruentes por terem os lados OX e XX' iguais compreendidos entre os ângulos iguais $\widehat{O} = \widehat{Z}$ e $\widehat{X} = \widehat{M}$. Portanto $\overline{MZ'} = \overline{XZ}$. Como é claro que $\overline{XZ} = \overline{X'M}$, segue-se que $z' = 2z$. (Esta explicação só faz sentido se for acompanhada de uma figura.) Analogamente, $x' = nx \Rightarrow z' = nz$.

Temos então (vide Exemplo 3) duas proporcionalidades: $x \mapsto y$ e $x \mapsto z$. Os dois fatores de proporcionalidade são iguais quando $y/x = z/x$, ou seja, quando $z = y$ (para o mesmo x). Isto significa que o triângulo OXZ é isósceles. Portanto os fatores de proporcionalidade são iguais se, e somente se, a reta r forma ângulos iguais com OA e OB.

Solução do problema da lebre e do cachorro

Um pulo de lebre é igual a $2/3$ de um pulo de cachorro. Portanto a dianteira da lebre é de $100/3$ pulos de cachorro. No momento em que alcançar a lebre, o cachorro terá dado x pulos e a lebre terá dado $4/3$ pulos (de lebre), ou seja, $(4/3) \times (2/3)x = (8/9)x$ pulos de cachorro. Nesse momento, a distância percorrida pelo cachorro (medida em termos de pulos) é igual àquela percorrida pela lebre mais a dianteira que ela levava no princípio. Assim:

$$x = \frac{8}{9}x + \frac{100}{3}, \text{ donde } 9x = 8x + 300 \text{ e } x = 300.$$

Portanto, dando 300 pulos, o cachorro alcança a lebre.