Matemática

Geometria Plana e Espacial

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro

Elaboradoras
Cláudia Cueva Candido
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

5
módulo

Nome do Aluno ____________________________________

Produção Editorial

Dreampix Comunicação

Revisão, diagramação, capa e projeto gráfico: *André Jun Nishizawa*, *Eduardo Higa Sokei*, *José Muniz Jr.*
Mariana Pimenta Coan, *Mario Guimarães Mucida* e *Wagner Shimabukuro*

Cartas ao Aluno

Carta da

Pró-Reitoria de Graduação

Caro aluno,

Com muita alegria, a Universidade de São Paulo, por meio de seus estudantes e de seus professores, participa dessa parceria com a Secretaria de Estado da Educação, oferecendo a você o que temos de melhor: conhecimento.

Conhecimento é a chave para o desenvolvimento das pessoas e das nações e freqüentar o ensino superior é a maneira mais efetiva de ampliar conhecimentos de forma sistemática e de se preparar para uma profissão.

Ingressar numa universidade de reconhecida qualidade e gratuita é o desejo de tantos jovens como você. Por isso, a USP, assim como outras universidades públicas, possui um vestibular tão concorrido. Para enfrentar tal concorrência, muitos alunos do ensino médio, inclusive os que estudam em escolas particulares de reconhecida qualidade, fazem cursinhos preparatórios, em geral de alto custo e inacessíveis à maioria dos alunos da escola pública.

O presente programa oferece a você a possibilidade de se preparar para enfrentar com melhores condições um vestibular, retomando aspectos fundamentais da programação do ensino médio. Espera-se, também, que essa revisão, orientada por objetivos educacionais, o auxilie a perceber com clareza o desenvolvimento pessoal que adquiriu ao longo da educação básica. Tomar posse da própria formação certamente lhe dará a segurança necessária para enfrentar qualquer situação de vida e de trabalho.

Enfrente com garra esse programa. Os próximos meses, até os exames em novembro, exigirão de sua parte muita disciplina e estudo diário. Os monitores e os professores da USP, em parceria com os professores de sua escola, estão se dedicando muito para ajudá-lo nessa travessia.

Em nome da comunidade USP, desejo-lhe, meu caro aluno, disposição e vigor para o presente desafio.

Sonia Teresinha de Sousa Penin.
Pró-Reitora de Graduação.

Carta da

Secretaria de Estado da Educação

Caro aluno,

Com a efetiva expansão e a crescente melhoria do ensino médio estadual, os desafios vivenciados por todos os jovens matriculados nas escolas da rede estadual de ensino, no momento de ingressar nas universidades públicas, vêm se inserindo, ao longo dos anos, num contexto aparentemente contraditório.

Se de um lado nota-se um gradual aumento no percentual dos jovens aprovados nos exames vestibulares da Fuvest — o que, indubitavelmente, comprova a qualidade dos estudos públicos oferecidos —, de outro mostra quão desiguais têm sido as condições apresentadas pelos alunos ao concluírem a última etapa da educação básica.

Diante dessa realidade, e com o objetivo de assegurar a esses alunos o patamar de formação básica necessário ao restabelecimento da igualdade de direitos demandados pela continuidade de estudos em nível superior, a Secretaria de Estado da Educação assumiu, em 2004, o compromisso de abrir, no programa denominado Pró-Universitário, 5.000 vagas para alunos matriculados na terceira série do curso regular do ensino médio. É uma proposta de trabalho que busca ampliar e diversificar as oportunidades de aprendizagem de novos conhecimentos e conteúdos de modo a instrumentalizar o aluno para uma efetiva inserção no mundo acadêmico. Tal proposta pedagógica buscará contemplar as diferentes disciplinas do currículo do ensino médio mediante material didático especialmente construído para esse fim.

O Programa não só quer encorajar você, aluno da escola pública, a participar do exame seletivo de ingresso no ensino público superior, como espera se constituir em um efetivo canal interativo entre a escola de ensino médio e a universidade. Num processo de contribuições mútuas, rico e diversificado em subsídios, essa parceria poderá, no caso da estadual paulista, contribuir para o aperfeiçoamento de seu currículo, organização e formação de docentes.

Prof. Sonia Maria Silva
Coordenadora da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Apresentação da área

[...] a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós. […] Assim é necessário colocar a ênfase:

— em procurar soluções e não apenas em memorizar procedimentos;
— em explorar modelos e não apenas em memorizar fórmulas;
— em formular conjecturas e não apenas em fazer exercícios.

[...] com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.

Schoenfeld (1992)[1]

Este curso de Matemática com duração de 4 meses está sendo oferecido a alunos do último ano do ensino médio da rede pública como um incentivo para continuarem seus estudos em direção ao ensino superior. Embora não cubra todo o programa do ensino médio, pretende-se estimular o interesse dos alunos pelos diversos temas de Matemática por meio de abordagens variadas.

Serão estudados tópicos sobre Números, Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Sistemas Lineares e Funções, privilegiando o entendimento das possíveis facetas de um mesmo assunto, a análise de resultados obtidos e a interligação entre os diversos conteúdos.

Escolhas foram feitas de modo a priorizar sua formação, a discussão de idéias e a percepção de que a Matemática é uma disciplina viva que pode ser construída, e não um amontoado de fórmulas prontas para serem decoradas e usadas. Lembrando que realmente aprendemos quando trabalhamos o conhecimento, analisando-o de várias maneiras e usando-o com critério, consideraremos, sempre que possível, aplicações em problemas reais e interdisciplinares.

Acreditando que o intercâmbio entre vocês, alunos do ensino médio, e os alunos da USP, que serão os seus professores, venha a aumentar a sua predisposição para o ensino superior, desejamos a todos **bons estudos**!

Coordenação da área de Matemática

[1]SCHOENFELD A. H. “Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics”. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematicas teaching and learning*. p. 334-370. Nova Iorque: MacMillan, 1992.

Apresentação do módulo

Desde a invenção da roda, círculos e circunferências fazem parte da nossa vida cotidiana. Suas muitas divisões e as figuras geométricas que podemos construir a partir delas são, desde as civilizações da antiguidade, utilizadas para representar a divisão do tempo, os signos do zodíaco e símbolos místicos, como o pentagrama da famosa sociedade pitagórica.

Ainda na antiguidade, divisões de terras, armazenamento e comercialização de alimentos motivaram os estudos iniciais de áreas e volumes. A necessidade de modelos para as figuras e formas geométricas que estão à nossa volta na natureza e nas construções provocou a busca de um melhor entendimento das formas espaciais. Entre árvores e montanhas, vales e planícies, contornando ou controlando o curso dos rios, o homem construiu templos, pirâmides, castelos, barragens, grandes e pequenas cidades, e as formas geométricas em suas múltiplas possibilidades foram e são exploradas até os dias atuais.

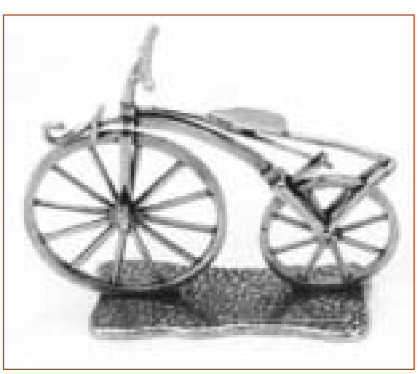
Ampliar o estudo das figuras geométricas planas e explorar a diversidade das figuras geométricas espaciais, suas propriedades métricas, áreas e volumes e algumas de suas muitas aplicações será o objetivo deste módulo.

Unidade 1

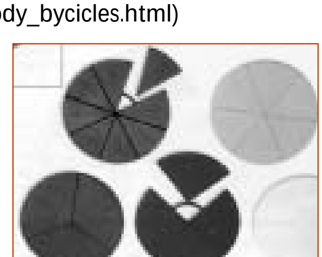
Polígonos e Circunferências

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaborador
Maria Elisa Galvão

(Fonte: http://www.pakaritampu.com/galeria/pages/circles.htm)



(Fonte: http://www.artil.com/html/body_bycicles.html)



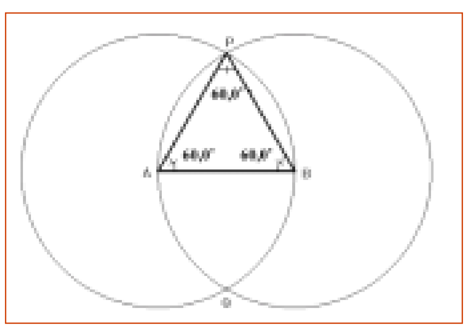
(Fonte:http://www.morethanbooks.ca/CDN/item154.htm)

A circunferência é, certamente, entre as figuras geométricas, uma das mais utilizadas na vida cotidiana, poderíamos dizer, desde a invenção da roda. Como já vimos anteriormente, é definida como o conjunto de pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo, que é o seu *centro*. Para sua representação gráfica, recorremos ao compasso. O segmento com extremos em um ponto qualquer da circunferência e o seu centro é um *raio*.

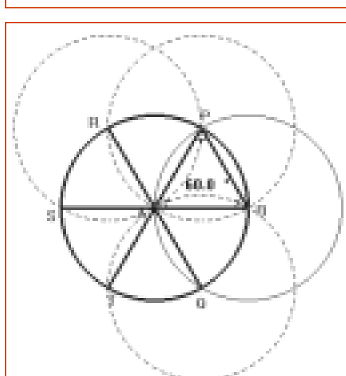
As divisões da circunferência também são muito utilizadas na prática (por exemplo, na construção dos relógios ou nas divisões dos mapas astrais e nos gráficos tipo "torta" com informações na mídia). Essas divisões estão associadas à construção dos polígonos regulares. Motivaram difíceis problemas relacionados à possibilidade de divisão em um número qualquer de partes iguais.

Vejamos alguns exemplos, baseados nos processos de construção com régua e compasso que temos utilizado no nosso estudo.

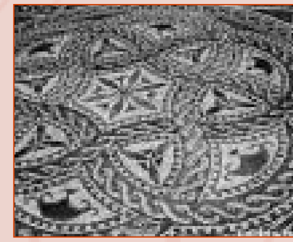
Tomando o segmento $\overline{AB}$ como raio, podemos traçar duas circunferências: uma com centro no ponto A e outra com centro no ponto B. Essas circunferências se encontram em pontos que denominamos P e Q, conforme a figura.

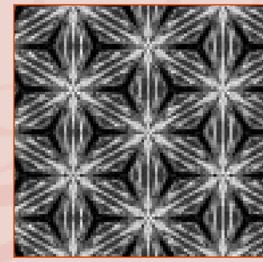


O triângulo ΔPAB é um dos triângulos congruentes obtidos com essa construção. Como todos os seus lados são raios das respectivas circunferências, seus comprimentos são todos iguais e temos um triângulo eqüilátero. Conseqüentemente, todos os ângulos desse triângulo têm a mesma medida: 60º. Se traçarmos novas circunferências com o mesmo raio $\overline{AB}$ e centros nos pontos P, Q e R, como na figura a seguir, teremos uma seqüência de pontos P, Q, R, S que, juntamente com os pontos A e B, dividirão a circunferência em seis partes iguais, correspondentes a ângulos com o vértice A em comum, todos medindo 60º.



Temos, assim, o procedimento para dividir a circunferência em seis partes iguais, utilizando régua e compasso. Podemos, a partir desses pontos de divisão, obter várias figuras geométricas interessantes, em que os padrões poligonais podem ser identificados.

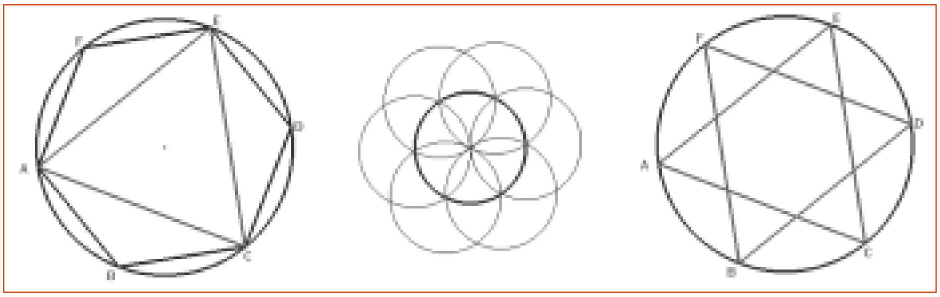




Para você fazer:

Utilizando a construção acima descrita, reproduza as figuras abaixo e verifique que:

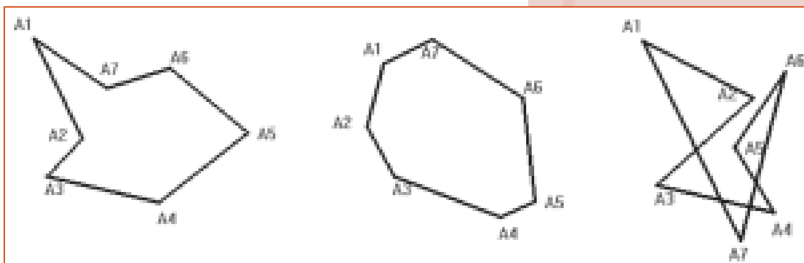
- na primeira figura, temos um triângulo eqüilátero (ΔAEC);
- todos os ângulos do polígono estrelado da direita têm a mesma medida.



A segunda figura é utilizada para a construção de uma rosácea simples, muito utilizada como elemento decorativo. Na última, temos um hexágono estrelado, que foi obtido unindo pontos não consecutivos de divisão. Vamos às definições gerais para essas novas figuras geométricas.

Em geral, dada uma seqüência de pontos em um plano, de forma que três pontos consecutivos não sejam colineares, chamamos de *polígono* a figura geométrica obtida unindo esses pontos sucessivamente e voltando ao ponto inicial.

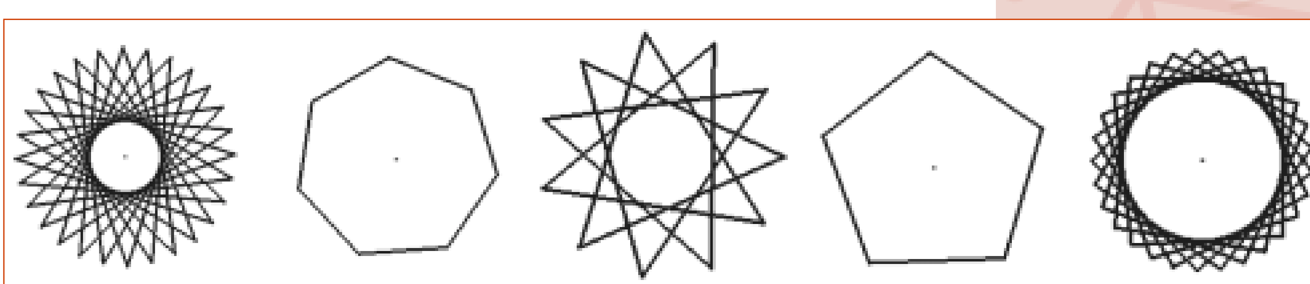
Os pontos $A_1, A_2, A_3,$ ... são os *vértices* do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,... são os *lados* do polígono. Vamos estudar apenas os *polígonos convexos*, que são aqueles que ficam sempre "do mesmo lado" da reta que contém qualquer de seus lados, como o polígono do centro, na figura ao lado.



Polígono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ =
$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup \overline{A_4A_5} \cup \overline{A_5A_6} \cup \overline{A_6A_7} \cup \overline{A_7A_1}$

Na mesma figura, temos polígonos com sete vértices e sete lados, que chamamos de heptágonos. Para nomear os polígonos de acordo com o seu número de lados, usamos os prefixos gregos: temos os triângulos e quadriláteros e, com número de lados superior a quatro, os polígonos são sucessivamente chamados pentágonos (5 lados), hexágonos (6), heptágonos (7), octógonos (8), eneágonos (9), decágonos (10) etc...

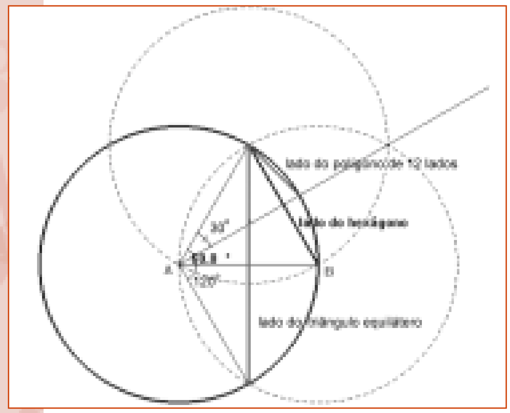
Abaixo, temos alguns outros exemplos de *polígonos regulares*, que são os que têm todos os lados e todos os ângulos congruentes. Alguns deles são os chamados *polígonos estrelados*, e não são convexos. Os polígonos regulares, estrelados ou não, podem ser construídos a partir da divisão da circunferência em partes iguais.

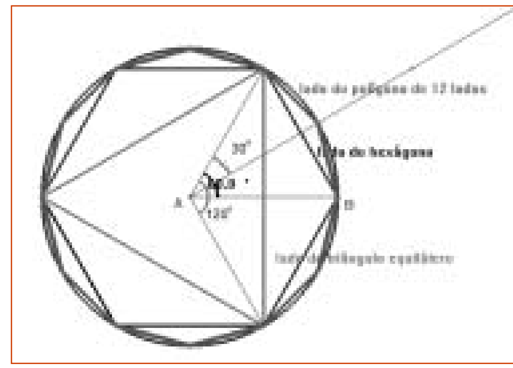


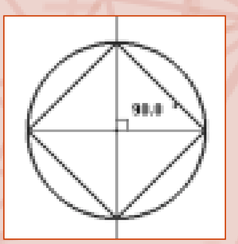
Esses polígonos motivam uma pergunta geral: como podemos, utilizando a régua e compasso, dividir a circunferência em um dado número de partes iguais?

Voltando à construção inicial da divisão da circunferência em seis partes iguais, observamos que, usando a construção da bissetriz (que já conhecemos) podemos obter, sucessivamente, as divisões em 12, 24, 48... partes, ou seja, em $2^n \cdot 3$ partes, para n = 1, 2, 3, 4...

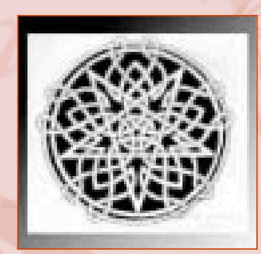
Temos, então, o *triângulo*, o *hexágono regular* e o *dodecágono regular* (12 lados), como na figura.



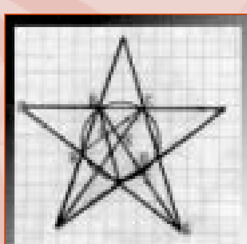




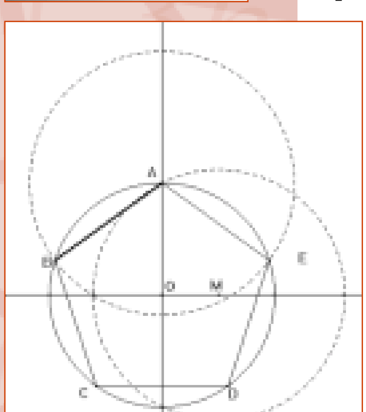
A divisão da circunferência em quatro partes iguais pode ser feita facilmente considerando duas retas perpendiculares passando pelo centro, ou ainda, um diâmetro da circunferência e sua mediatriz. Com o auxílio das bissetrizes, podemos continuar dividindo em 8, 16, 32, ..., 2^n partes, para todo *n* natural, e temos os vértices de polígonos regulares com número par de lados.



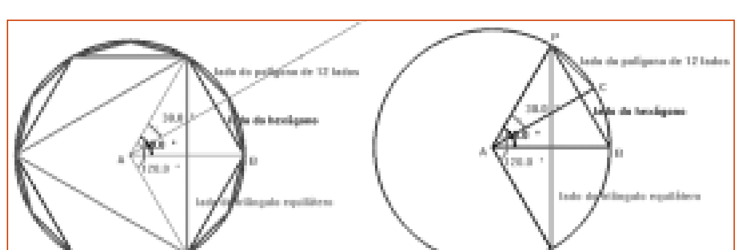
Os pentagramas das figuras ao lado estão relacionados com a divisão em cinco partes iguais. A construção com régua e compasso dessa divisão já é mais elaborada, e está esboçada na figura abaixo. Com centro em M, ponto médio do raio, tomar a circunferência que passa por A; a circunferência com centro A, passando pelo ponto de intersecção da primeira circunferência construída com o diâmetro determina o ponto B, ou seja, o lado $\overline{AB}$ do pentágono.



A existência de uma construção geral de divisão em partes iguais foi um problema muito difícil, conhecido desde os antigos geômetras gregos, que só foi resolvido completamente no século XIX, quando foi provado que nem todas as divisões exatas da circunferência podem ser feitas com régua e compasso. Muitos dos processos conhecidos são aproximados. O primeiro deles é a divisão em sete partes iguais, que não pode ser resolvida exatamente com régua e compasso.



Se considerarmos um dos lados do *triângulo*, do *hexágono regular* e do *dodecágono regular*, obtidos a partir da construção inicial, como na figura abaixo, observamos ainda que cada um deles determina com o centro A da circunferência um triângulo isósceles (já que dois dos lados são raios), cujo ângulo, no vértice A, tem medida 120º, 60º ou 30º respectivamente.

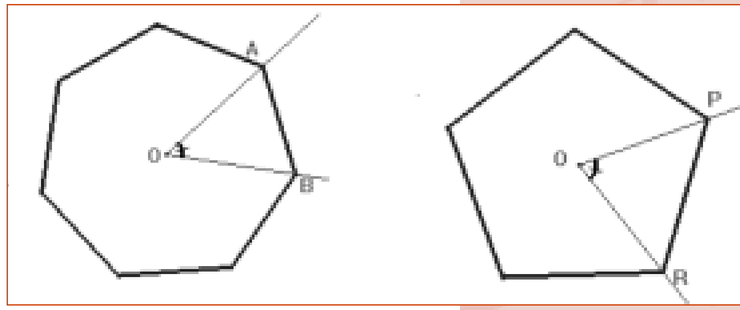


Esse é um fato geral: para um polígono regular de n lados, se considerarmos o triângulo isósceles determinado por dois vértices consecutivos e o centro da circunferência em que estão inscritos, o ângulo desse triângulo com vértice no centro da circunferência mede **360º / *n***.

Encontre agora:

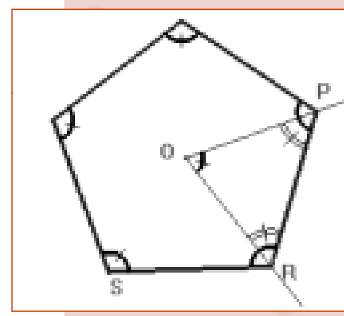
1. As medidas dos ângulos $\angle AOB$ e $\angle POR$, sabendo que os polígonos são regulares.

2. O número de lados dos polígonos cujos ângulos $\angle AOB$ ($\overline{AB}$ um lado do polígono) e $\angle POR$ ($\overline{PR}$ um lado do polígono) medem 12º e 11º15', respectivamente, sendo o ponto O o centro de ambos.



Podemos também encontrar a medida do ângulo associado a cada um dos vértices de um polígono regular, que é especialmente chamado de *ângulo interno* desse polígono (a nomenclatura vale mesmo que o polígono não seja regular).

Examinemos alguns casos particulares: no triângulo eqüilátero, cada ângulo interno mede 60º, no quadrado, 90º. Quando passamos para o pentágono regular, já não encontramos esse valor com facilidade. Vamos ver como encontrar a medida do ângulo $\angle PRS$ (um dos ângulos internos do pentágono regular).



O ângulo $\angle POR$ do pentágono regular mede 360º / 5 = 72º.

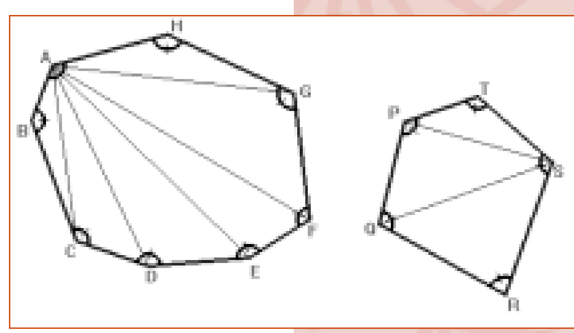
Sendo o triângulo ΔPOR isósceles, temos:

2. m ($\angle OPR$) = 180º – 72º = 108º, que será a medida do ângulo interno $\angle PRS$ do pentágono regular.

Uma outra maneira de resolver o problema é dividir o polígono em triângulos usando as diagonais por um de seus vértices, como veremos a seguir.

Observamos que todo polígono convexo com n lados pode ser dividido em *(n -2)* triângulos pelas diagonais traçadas por um de seus vértices, como nas figuras abaixo. Temos, portanto, que a soma das medidas de todos os ângulos internos do polígono coincide com a soma das medidas de todos os ângulos desses triângulos, e vale a fórmula:

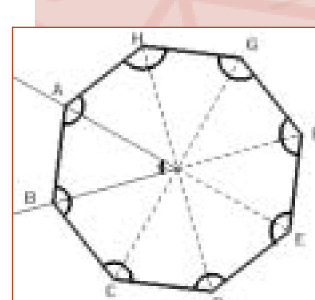
$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180^o}$$



Observamos que, de cada vértice de um polígono convexo com n lados, partem *(n – 3)* diagonais e também que, como temos n vértices, o número D de diagonais do polígono será, então,

$$\boxed{D = n\,(n - 3)/ 2}$$

pois cada diagonal é contada duas vezes no produto $n\,(n - 3)$.



No caso especial de um polígono regular de n lados, se consideramos o centro da circunferência em que está inscrito, podemos dividi-lo em n triângulos isósceles congruentes (identifique o caso de congruência que podemos utilizar).

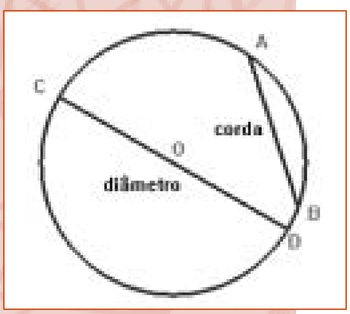
Como todos os n ângulos internos terão a mesma medida e a soma das medidas é o valor S_i acima, temos que a medida $\boldsymbol{A_i}$ de cada *ângulo interno de um polígono regular* é dada por:

$$\boxed{A_i = (n - 2) \cdot 180^o / n}$$

Agora faça você:

1. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um heptágono regular e encontre a medida de cada um dos ângulos internos.
2. Qual é o número de lados de um polígono cuja soma das medidas dos ângulos é 1980º?
3. Determine o número de diagonais do dodecágono.
4. Determine número de lados de um polígono que tem nove diagonais.
5. Determine o polígono cujo número de diagonais é o quádruplo do número de lados.
6. Três polígonos convexos têm *n*, *n + 1* e *n + 2* lados, respectivamente. Sendo 3240º a soma de todos os ângulos internos desses três polígonos, determine o valor de *n*.

Voltando à circunferência,

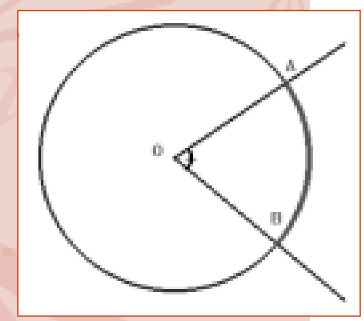


chamemos O o seu centro. Vamos escolher dois de seus pontos (que denominaremos A e B).

O segmento $\overline{AB}$ é chamado uma *corda* da circunferência.

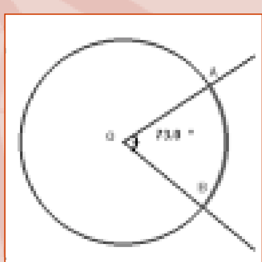
Se uma corda passa pelo centro da circunferência ela é especialmente chamada de *diâmetro* da circunferência, que, na figura, tem extremos C e D.

Dada uma corda, distinta de um diâmetro, temos determinado um ângulo ∠AOB, chamado ângulo cêntrico ou ângulo central.



O arco AB da circunferência que fica no interior do ângulo será chamado um *arco menor* e terá sua medida dada pela medida do ângulo ∠AOB, que, por sua vez, é chamado de *ângulo cêntrico ou central*.

Se os pontos A e B são os extremos de um diâmetro, o arco será chamado de *semi-circunferência*. O *arco maior* é o conjunto de pontos da circunferência que está no exterior do ângulo.



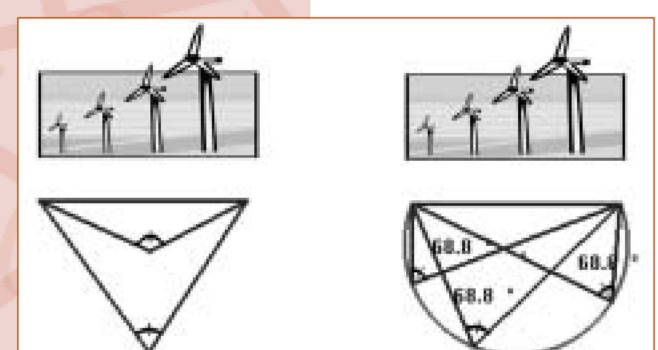
A um arco menor, podemos associar uma medida que será a medida do ângulo central que o contém no seu interior. Na figura ao lado, temos que a medida do arco AB é 73º.

Vamos utilizar essa maneira de medir arcos para verificar uma propriedade que utilizamos muito em situações do dia a dia.

TIRANDO FOTOGRAFIAS

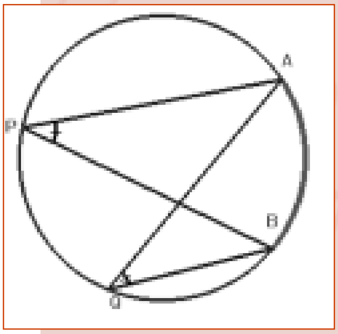
A lente de uma máquina fotográfica tem um ângulo de abertura fixo, que nos permite uma visão limitada do objeto fotografado, dependendo da posição em que nos colocamos.

Na figura abaixo, à esquerda, observamos que quando nos aproximamos de uma cena, para que a vejamos totalmente temos que ter um ângulo de visão maior do que quando nos afastamos dela.



Por outro lado, a figura à direita sugere uma propriedade importante de pontos de um arco de circunferência: quando variamos o ponto sobre o arco, a medida do ângulo é a mesma, e podemos fotografar a cena toda, aproveitando a abertura fixa da câmara fotográfica, em qualquer posição sobre o arco.

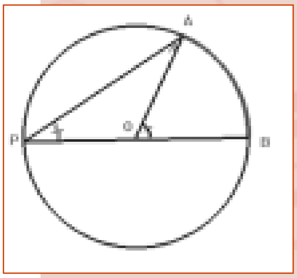
Para entender essa propriedade, vamos considerar *ângulos inscritos em uma circunferência*, que são ângulos que têm o vértice sobre a circunferência e lados contidos em duas cordas que têm como extremidade comum esse vértice.



Na figura ao lado, temos os *ângulos inscritos*: ∠APB e ∠AQB. Diremos também que o arco AB é *o arco interceptado* por esses ângulos.

Podemos provar a propriedade geral:

A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central (ou, equivalentemente, do arco interceptado).



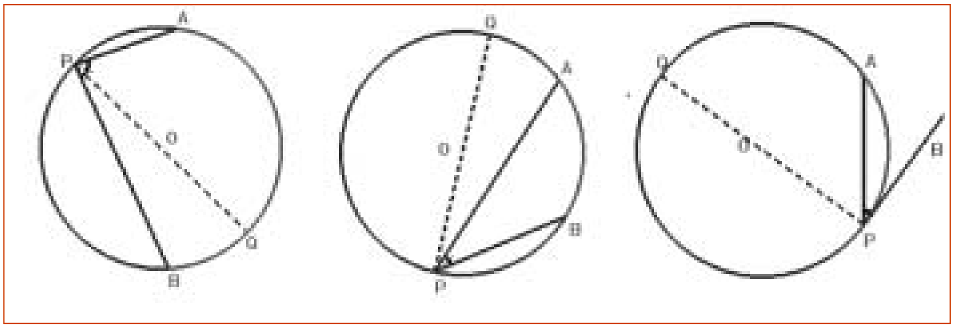
A verificação dessa propriedade depende de um fato simples, ilustrado pela figura abaixo.

Considere um ângulo inscrito ∠APB tal que o segmento $\overline{BP}$ é um diâmetro da circunferência. O triângulo ΔAOP é um triângulo isósceles e o ângulo ∠AOB é o ângulo externo desse triângulo, logo,

m(∠AOB) = m (∠OPA) + m (∠OAP) = 2 . m (∠APB); logo,

m (∠APB) = m (∠AOB) / 2

Usando esse resultado e a soma ou a diferença da medida de ângulos, podemos verificar que a propriedade acima vale para ângulos quaisquer, conforme as figuras a seguir, em que o centro da circunferência é interno ou externo ao ângulo dado:



À esquerda, temos que

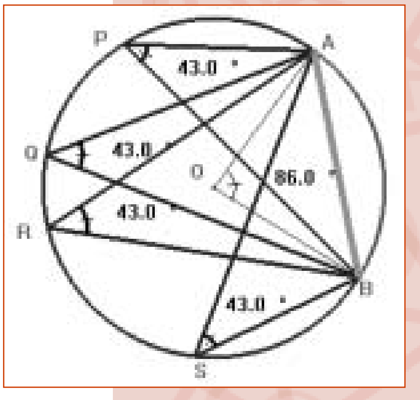
m (∠APB) = m (∠APQ) + m (∠QPB) = [m (∠AOQ) + m (∠BOQ)] / 2;

na figura do meio:

m (∠APB) = m (∠QPB) - m (∠QPA) = [m (∠BOQ) - m (∠AOQ)] / 2;

à direita, temos:

m (∠APB)=90º – m (∠OAP)=[180º – 2 m (∠OAP)] /2= m (∠AOP) / 2



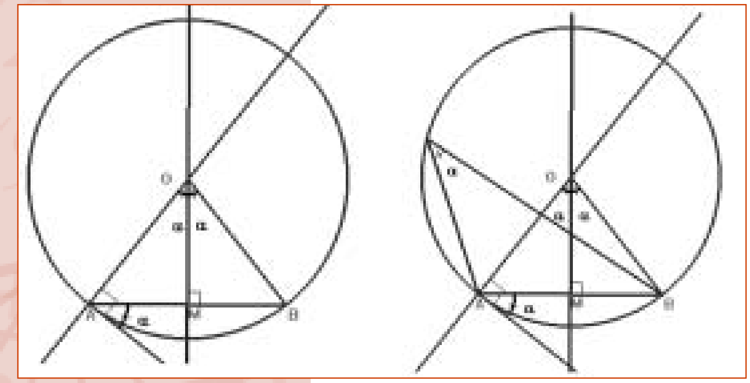
Voltando ao problema do fotógrafo, destacamos que, como conseqüência da propriedade acima, temos que todos os ângulos inscritos em um mesmo arco têm a mesma medida (na figura, 43º, pois o ângulo central mede 86º).

Dessa forma, o fotógrafo, percorrendo esse arco, usa a abertura da máquina de forma a enquadrar toda a extensão AB do objeto fotografado.

O arco ao qual pertence o vértice do ângulo inscrito é chamado *arco capaz de ângulo* α (veja a figura a seguir).

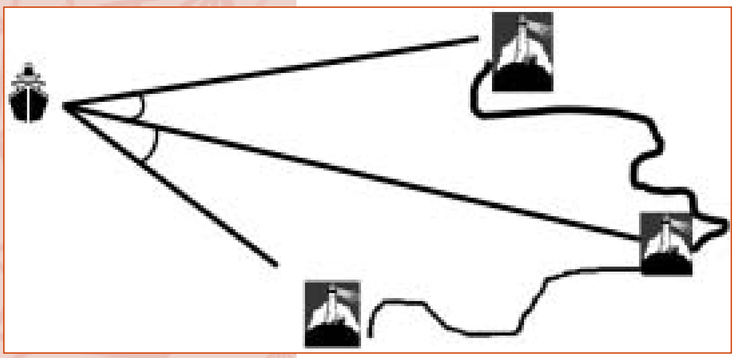
O arco capaz também estava relacionado à construção de um triângulo, dados um lado, o ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado. Essa construção foi admitida no Módulo 3, quando analisamos o caso de congruência LAAo, e precisávamos construir o ângulo oposto a um lado dado. A construção da solução se faz conforme a figura abaixo.

Dado o segmento $\overline{AB}$ e o ângulo α, com vértice em *A*, construímos um ângulo de medida α e a perpendicular ao lado do ângulo pelo ponto *A*. A intersecção da perpendicular com a mediatriz do segmento dá o centro *O* da circunferência. O ângulo central em *O* será o dobro do ângulo α; portanto, qualquer ângulo inscrito terá a medida do ângulo α.



O arco capaz pode ser utilizado para localização, quando se tem três pontos de referência.

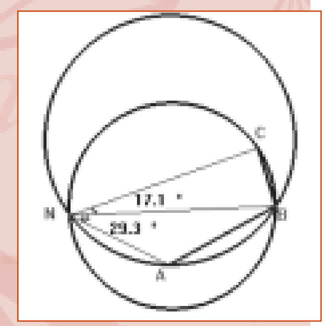
Como determinar a posição de um navio



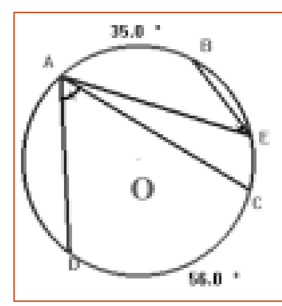
A bordo de um navio em alto mar, avistamos três pontos conhecidos na costa e conseguimos medir o ângulo de visão para cada par de pontos, como na figura acima.

Vejamos um esboço da solução: na figura abaixo, os pontos A, B e C representam os pontos de referência (que podem ser os faróis) na costa e o ponto N representa a localização do navio (que queremos determinar).

Vamos supor que o ângulo de visão quando os pontos de referência são A e B é 29,3º e é 17,1º quando os pontos de referência são B e C . O navio estará em algum ponto do arco capaz do segmento $\overline{AB}$ de medida 29,3º e também em algum ponto do arco capaz do segmento $\overline{BC}$ de medida 17,1º. A intersecção dos dois arcos dá a posição do navio!



Alguns exemplos

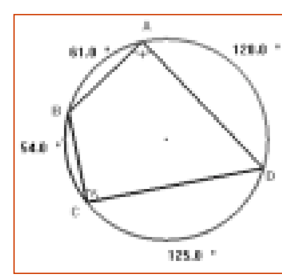


1. Na figura ao lado, calcular a medida dos ângulos ∠CAD e ∠AEB:

Lembrando a propriedade acima,

M (∠CAD) = (m (∠COB)) /2 = 28º.

Da mesma forma, m (∠AEB) = m (AB) / 2 = 17º30' ou 17,5º.



2. Encontre a medida dos ângulos ∠BAD e ∠BCD do quadrilátero inscrito da figura ao lado:

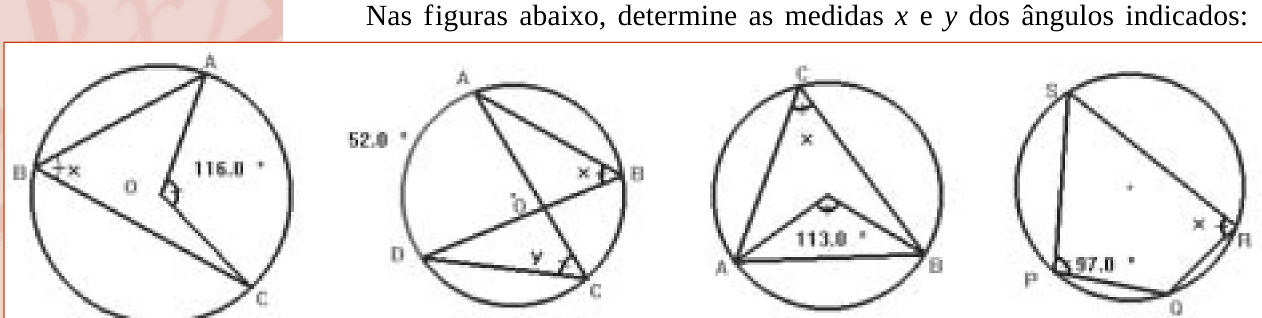
A medida do ângulo ∠BAD será: (54º + 125º)/ 2, logo, m (∠BAD) = 89,5º.

Por outro lado, temos m (∠BCD) = (120º + 61º) = 90,5º.

Em ambos os casos, somamos as medidas dos arcos interceptados por esses ângulos. Verificamos, nesse exemplo, uma *propriedade geral dos quadriláteros convexos inscritos*: a soma das medidas dos ângulos opostos será 180º.

Agora faça você:

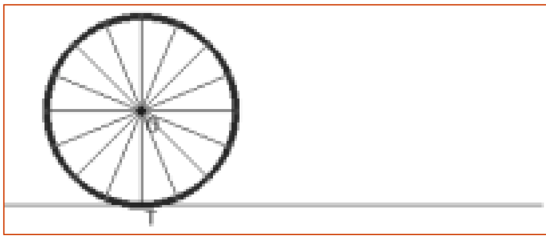
Nas figuras abaixo, determine as medidas *x* e *y* dos ângulos indicados:



2. Verifique que um triângulo inscrito em uma semicircunferência é um triângulo retângulo.

CIRCUNFERÊNCIAS E RETAS NO PLANO

Quando a roda de uma bicicleta rola sobre um terreno plano, podemos, em cada instante, representar a posição da roda pela figura abaixo. Temos ilustrada mais uma importante propriedade da circunferência:

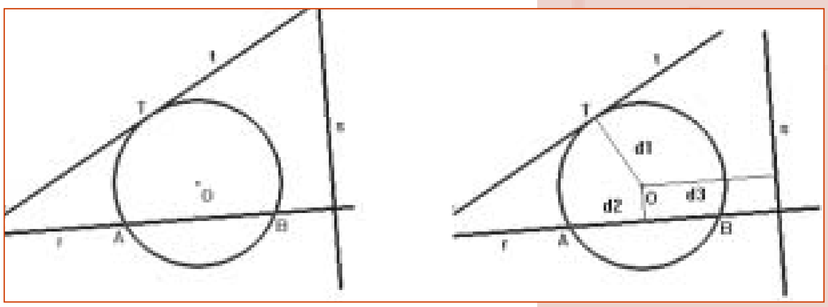


A reta tangente à uma circunferência é perpendicular ao raio pelo ponto de tangência.

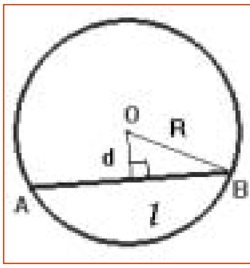
Ou seja, na figura, a reta *t* é perpendicular ao segmento $\overline{OT}$

Dada uma circunferência no plano, uma reta qualquer desse plano pode ser:
- *tangente* à circunferência, se a encontra num único ponto;
- *secante* à circunferência, se na intersecção com a circunferência temos dois pontos distintos;
- *exterior* à circunferência, se a intersecção for vazia.

Podemos também verificar que:
- a distância d_1 entre a reta tangente *t* e o centro *O* é igual ao comprimento OT do raio;
- a distância d_2 entre a reta secante r e o centro *O* é menor que o comprimento OT;
- a distância d_3 entre a reta exterior *s* e o centro *O* é maior que o comprimento OT.

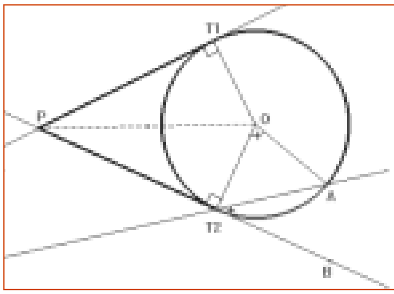


A distância do centro de uma circunferência a um corda $\overline{AB}$, seu raio R e o comprimento *l* da corda, pelo teorema de Pitágoras, verificam (na figura ao lado):



$$R^2 = (l/2)^2 + d^2$$

Retas e semi-retas tangentes e secantes a uma circunferência podem ser estudadas considerando ainda ângulos e segmentos determinados por elas. Vejamos algumas delas:



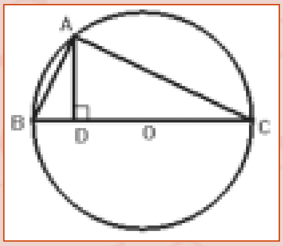
Por um ponto P externo a uma circunferência os segmentos tangentes têm o mesmo comprimento, isto é, $PT_1 = PT_2$.

A medida do ângulo $\angle AT_2B$ é igual à metade da medida do ângulo central $\angle AOT_2$, isto é,

$$m(\angle AT_2B) = m(\angle AOT_2)\ /\ 2$$

Para você verificar:

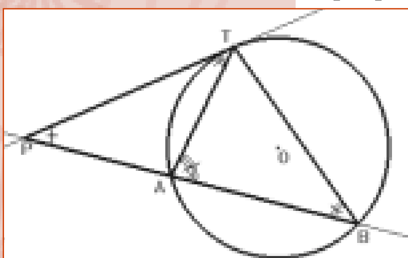
- Qual é a propriedade de congruência de triângulos que garante a congruência dos segmentos tangentes na figura acima (lembre-se do caso especial de congruência dos triângulos retângulos)?
- Qual é a relação entre as medidas dos ângulos $\angle T_1PO$ e $\angle T_2PO$?



Na figura, $\overline{BD}$ é a projeção ortogonal da corda $\overline{AB}$ sobre o diâmetro $\overline{BC}$ da circunferência de centro *O*. Sendo *AB* = 12cm e *AD* = 48cm, calcule a medida do raio dessa circunferência.

TANGENTES E SECANTES

Por um ponto P externo à circunferência, consideremos uma reta tangente e uma secante, que intersecta a circunferência em A e B. Temos as seguintes propriedades:

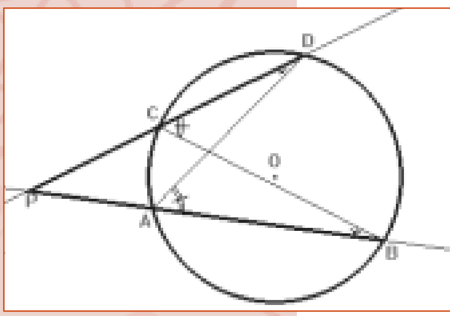


- para os ângulos:
m (∠TPB) = (m (∠TOB) – m (∠TOA)) / 2

- para o comprimento dos segmentos:
PT ² = PA . PB

Um bom exercício será a verificação dessas propriedades. A primeira usa as definições de ângulo e a segunda a semelhança (AA) dos triângulos ΔPAT e ΔPTB.

Finalmente, podemos considerar por um ponto P externo à circunferência, duas retas secantes, e temos as propriedades:

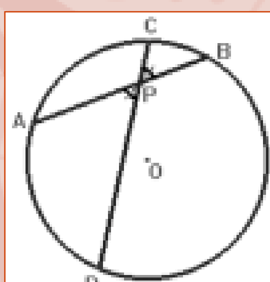


- para os ângulos:
m (∠BPD) =(m (∠BOD) – m (∠COA))/2

- para o comprimento dos segmentos:
PA . PB = PC . PD

Como no caso anterior, a semelhança entre os triângulos ΔPAD e ΔPCB garante a relação entre os comprimentos.

Se o ponto P é interno à circunferência, temos relações a seguir, que podem ser verificadas de forma semelhante:

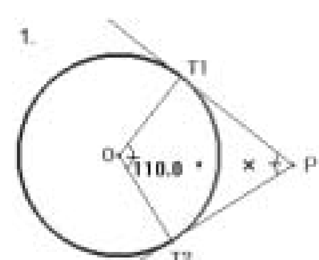


- para os ângulos:
m (∠BPC) = (m (∠BOC) + m (∠DOA)) /2
- para o comprimento dos segmentos:
PA . PB = PC . PD

Usando as propriedades acima, faça agora você:

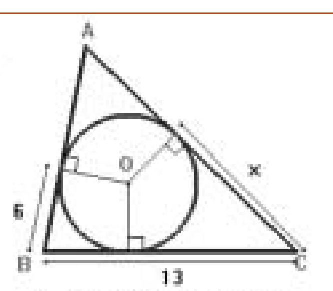
Calcule o comprimento dos segmentos ou a medida dos ângulos nas figuras abaixo.

1.



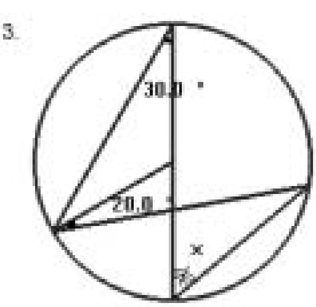
T1 e T2 pontos de tangência

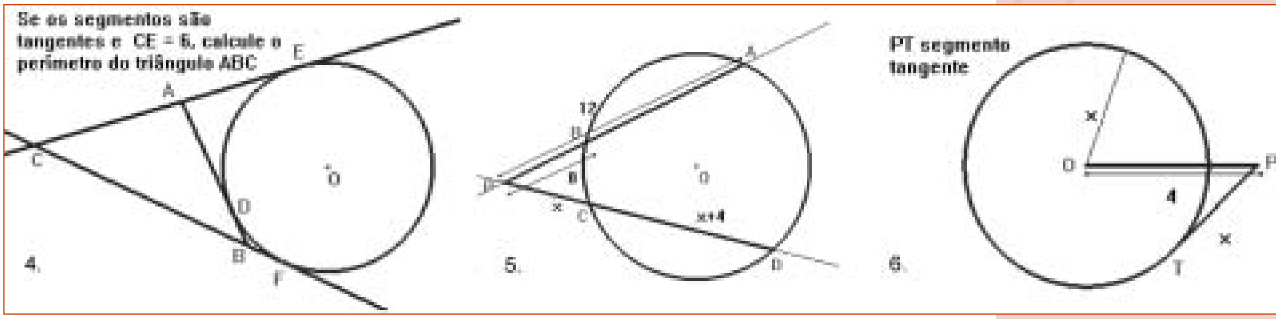
2.



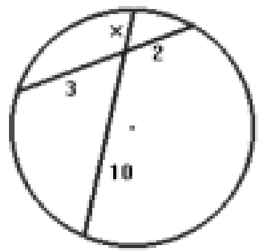
A circunferência inscrita é tangente aos lados do triângulo

3.





7. (FUVEST) O valor de x na figura ao lado é:



a) $\dfrac{20}{3}$

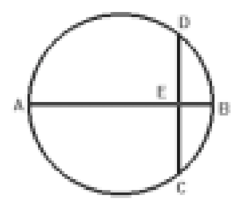
b) $\dfrac{3}{5}$

c) 1

d) 4

e) 5

8. (UFMG) Num círculo, a corda CD é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se AE . EB = 3, a medida de CD é:



a) 3

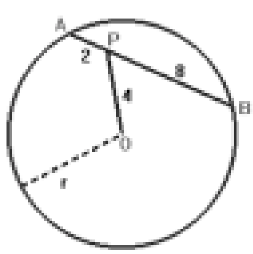
b) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) 6

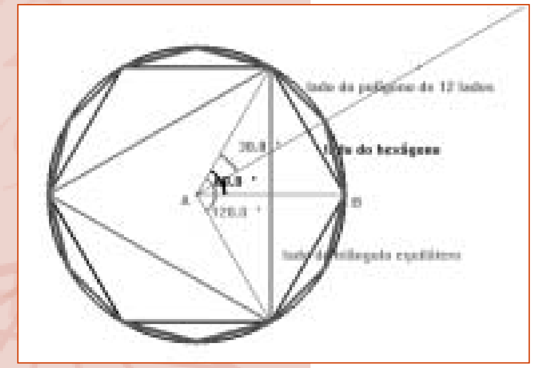
9. Na figura abaixo, o ponto P é interno à corda $\overline{AB}$ da circunferência de centro O e raio **r**. Sendo PO = 4cm, PA = 2cm e PB = 8 cm, calcule o valor de **r.**



Os polígonos e o comprimento da circunferência

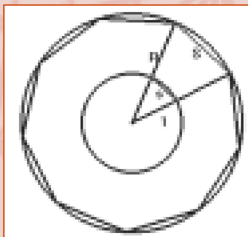
Foi um grande desafio na história da Matemática encontrar a relação entre o comprimento da circunferência e o seu raio, de modo a determinar o comprimento dessa curva.

Os babilônios usavam, em aproximadamente 2000 a.C., que o comprimento da circunferência era o triplo do seu diâmetro. Um pouco mais tarde, aparece também o multiplicador 3 1/8, isto é, usava-se que o comprimento da circunferência era 25/8 do seu diâmetro. Supõe-se que esses multiplicadores eram calculados diretamente através das medidas desses comprimentos. Em um tablete de argila babilônico, encontram-se cálculos de comprimentos de lados de polígonos regulares de três e sete lados e tentativas de melhorar as estimativas acima. Já nos papiros egípcios, relacionada a um cálculo de área



do círculo, temos uma estimativa para a razão entre o comprimento da circunferência e o seu raio que chega a 3,16.

O chamado método de exaustão originalmente introduzido por Eudoxo foi utilizado por Arquimedes, que viveu entre 287 e 212 a.C. Arquimedes estabeleceu os cálculos para a maneira clássica de se calcular o comprimento da circunferência. Tomando uma circunferência de raio unitário,considerou uma seqüência de polígonos regulares inscritos e circunscritos, começando pelo hexágono, e duplicando sempre o número de lados. A idéia de Arquimedes era simples: quanto maior o número de lados do polígono, mais próximo o seu perímetro estará do comprimento da circunferência.



$$\frac{S}{s} = \frac{R}{1}$$

O cálculo dos perímetros desses polígonos levou Arquimedes à conclusão de que o multiplicador adequado (o nosso número π) ficava entre

$$\mathbf{223\ /\ 71 < \pi < 22/7}$$

o que nos dá π aproximadamente 3,14, e o *comprimento da circunferência de raio unitário* aproximadamente 2π.

Esse procedimento inaugura uma longa história de aproximações para o valor de p. Utilizando a semelhança de triângulos para as aproximações poligonais, observamos que os comprimentos s e S dos lados de dois polígonos contidos em circunferências concêntricas de raios 1 e R, respectivamente, verificam:

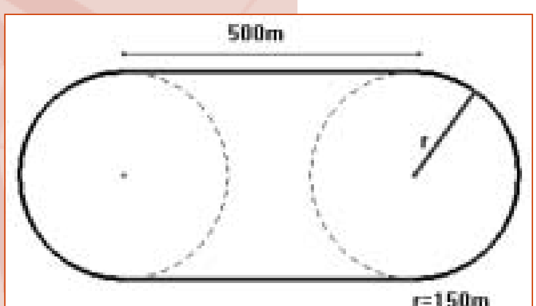
$$\frac{S}{s} = \frac{R}{1}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{S = s\ .\ R}$$

Sendo 2π o comprimento da circunferência de raio unitário, se o *raio da circunferência* é *R*, seu *comprimento C* será $C = 2\ \pi\ R$.

Agora faça você:



1. Uma pista circular para ciclismo tem um raio de 150 m. Um ciclista deu 500 voltas nessa pista. Quantos metros ele percorreu?

2. Na mesma pista do primeiro exercício, deve ser disputada uma prova cujo percurso deve ter 40 quilômetros. Quantas voltas, no mínimo, deverão ser previstas para a prova?

3. Um circuito para corrida de carros tem o formato da figura abaixo. Quantos metros tem o circuito, se os trechos de reta tangenciam os trechos circulares?

Unidade 2

Áreas

Organizadores

Antônio Carlos Brolezzi

Elvia Mureb Sallum

Martha S. Monteiro

Elaboradora

Cláudia Cueva Candido

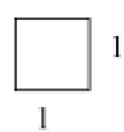
Na Antigüidade, a necessidade do cálculo de áreas estava ligada ao problema de divisão de terras. É bem conhecida a história de que as cheias do rio Nilo desfaziam as demarcações entre as terras ao longo de suas margens; para refazê-las, eram necessários cálculos e medidas de área.

Hoje, precisamos, por exemplo, decidir quantas caixas de lajotas são necessárias para trocar o piso da garagem ou quanto tecido devemos comprar para confeccionar cortinas para a sala de aula. Para a resolução desses problemas, faz-se necessário o conceito de área de figuras planas.

Uma figura plana poligonal ou uma *região poligonal* é a reunião de um polígono convexo com seu interior. Para simplificar, em vez de falarmos em área da região quadrada ou da região triangular, falaremos em área de quadrado, triângulo e assim por diante.

Intuitivamente, a área de uma região é a medida associada à quantidade do plano que ela ocupa. Quando observamos que duas regiões têm áreas iguais ou que a área de um terreno é maior do que a área de um outro, estamos fazendo comparações entre essas medidas.

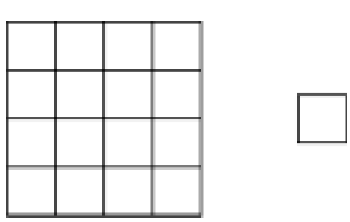
Para calcular a área de uma região R, devemos compará-la com uma unidade de área escolhida como padrão. O número de vezes que a unidade de área cabe em R será sua área. Adotamos, usualmente, o quadrado de lado igual a uma unidade de comprimento como unidade de área; isto é, estabelecemos a convenção de que a área do quadrado de lado igual a uma unidade é igual a 1.



Uma unidade de área

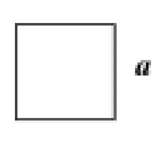
A unidade de medida de área usual é o metro quadrado, m², ou suas subdivisões dm², cm², conforme os comprimentos sejam dados em m, dm ou cm.

Um quadrado de lado com medida igual a n, n natural, tem área igual a n^2, pois pode ser decomposto em n^2 quadrados de lado 1.



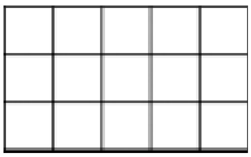
Cabem 16 quadrados de lado 1 no quadrado de lado 4. Portanto, sua área é igual a 16.

De modo geral, se o lado de um quadrado tem por medida o número real a, então a sua área é igual a a^2.



Q: quadrado de lado a
Área de Q = a²

Área do retângulo



No retângulo de base 5 e altura 3 cabem 15 quadrados de lado 1.
Logo, sua área é igual a 15.

R: retângulo de lados a e b
Área de R = ab

Consideremos um retângulo R. Se os lados de R têm medidas m e n, m e n naturais, então cabem, em R, mn quadrados de lado 1, de modo que se tem área de R= mn.

De modo geral, se um retângulo tem lados de medidas a e b (reais), a sua área é igual a ab, isto é, o produto de seus lados. É comum renomearmos os lados de um retângulo de base e altura e, então, dizermos que a área do retângulo é o produto de sua base por sua altura.

Faça alguns cálculos:

1. Calcule a área de uma garagem que mede 3 m por 4 m.
2. Queremos fazer o piso da garagem com lajotas que medem 15 cm por 20 cm e são vendidas em caixas com 10 lajotas. Qual a área de cada lajota? Que área pode ser coberta com o material de uma caixa?
3. De quantas caixas vamos precisar para ladrilhar a garagem do item (1)?

Até aqui foi fácil, mas como faremos para cobrir paralelogramos, triângulos ou outras figuras mais complicadas com quadrados?

Para isso, vamos precisar das seguintes *propriedades* da chamada função área:

Equivalência plana – Dizemos que duas figuras planas são equivalentes se têm a mesma área. Poderíamos pensar, por exemplo, que duas figuras são equivalentes se puderem ser cobertas com exatamente a mesma quantidade de tinta (considerando camadas de tinta de mesma espessura).

É muito importante notar que duas *regiões congruentes são equivalentes*, pois a mudança de posição no plano não interfere na porção de plano que a figura ocupa.

R: reunião de R_1 e R_2
Área de R = área de R_1 + área de R_2

Adição de áreas – Se uma região R é a reunião de duas regiões R_1 e R_2 cuja intersecção é um número finito de segmentos ou um número finito de pontos, então a área de R é a soma da área de R_1 com a área de R_2.

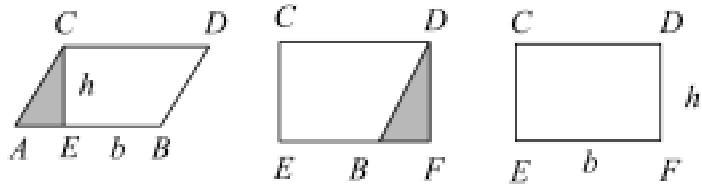
Nos próximos exemplos, você vai ver de que maneira essas propriedades podem nos ajudar a determinar a área de várias regiões poligonais. Chegaremos a algumas expressões para o cálculo de área de certas figuras, mas é importante salientar que, nem sempre, o uso destas expressões é o melhor caminho. A idéia é compor figuras planas ou decompô-las para depois recompô-las, de modo a simplificar os cálculos de área.

Área do Paralelogramo

Seja $ABCD$ um paralelogramo, isto é, um quadrilátero que tem lados paralelos dois a dois. Para encontrarmos uma expressão para a área, vamos decompor e depois recompor a figura.

Chamaremos um dos lados $\overline{AB}$, por exemplo, de base, e denotaremos por b a sua medida. A altura h é o comprimento do segmento $\overline{CE}$ perpendicular a $\overline{AB}$ pelo ponto C. Considere agora o retângulo $EFCD$, onde F é tal que $\overline{DF}$ é paralelo a $\overline{CE}$. Note que o triângulo CAE é congruente ao triângulo DBF (qual é o caso de congruência e por quê?) e, portanto, o paralelogramo $ABCD$ é equivalente ao retângulo *EFCD*, ou seja, as duas figuras têm a mesma área. Assim, podemos concluir que a área de um paralelogramo é o produto de sua base por sua altura.

Desenhe uma cópia do paralelogramo da figura ao lado, recorte o triângulo *CAE* e desloque-o para a posição do triângulo *DBF* para melhor entender o processo de decomposição e recomposição utilizado aqui.

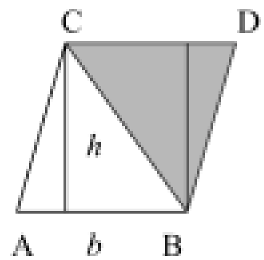


P: paralelogramo de base b e altura h
Área de P = bh

ÁREA DO TRIÂNGULO

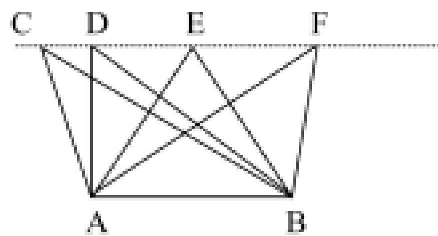
Para calcular a área de um triângulo, basta observar que todo triângulo é equivalente à metade de um paralelogramo. A idéia aqui utilizada é compor um paralelogramo a partir de dois triângulos congruentes ao original.

Seja ΔABC o triângulo de base $AB = b$ e altura h, da figura, e seja D tal que $\overline{BD}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Observe que $ABCD$ é um paralelogramo e que a soma das áreas dos triângulos ΔABC e ΔDCB é igual à área do paralelogramo $ABCD$. Verifique que os triângulos ΔABC e ΔDCB são congruentes e conclua que a área de cada triângulo é metade da área do paralelogramo com mesma base e mesma altura.



T: triângulo de base b e altura h

Área de T = $\dfrac{1}{2}bh$



Observe, na figura ao lado, que todos os triângulos com base $\overline{AB}$ e o terceiro vértice sobre uma reta paralela a $\overline{AB}$ têm a mesma área, pois todos têm a mesma altura.

Agora faça você

1. Verifique que a área A do *triângulo eqüilátero* de lado l é dada por $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^2$.

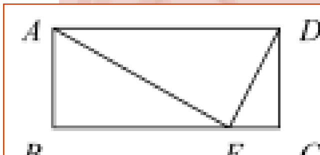
2. Um retângulo com 34 cm de perímetro tem 52 cm² de área. Quais as medidas de seus lados?

3. Calcule a área de um quadrado no qual a diferença entre as medidas de uma diagonal e de um lado é igual a 2 cm.

4. Um quadrado é equivalente a um retângulo de dimensões 10 e 15. Qual a medida do lado desse quadrado?

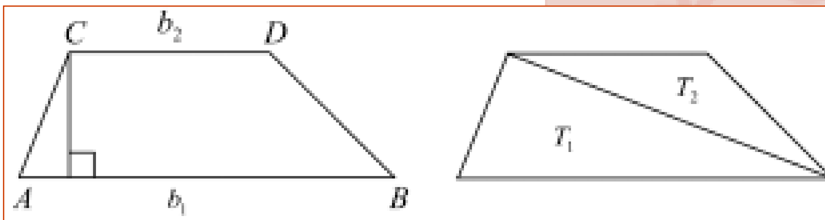
5. Calcule a área de um triângulo retângulo ΔABC, de cateto $AB = 11$ cm e hipotenusa $BC = 15$ cm.

6. Calcule a área do triângulo EAD inscrito no retângulo $ABCD$ de área 96 cm² da figura ao lado.



ÁREA DO TRAPÉZIO

Seja $\overline{ABCD}$ um trapézio com lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos, de medidas $AB = b_1$ e $CD = b_2$ e com altura h. Para calcular sua área , vamos dividi-lo em dois triângulos: T_1 de base b_1 e altura h e T_2 de base b_2 e altura h. A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos: $\dfrac{1}{2}b_1h + \dfrac{1}{2}b_2h$



Tra: trapézio de bases b_1 e b_2 e altura h.

Área de Tra = $\dfrac{b_1 + b_2}{2}h$

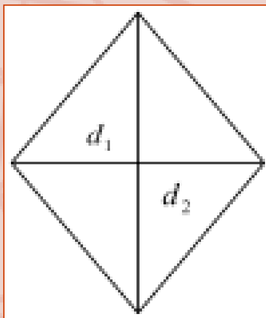
ÁREA DO LOSANGO

Um losango é um paralelogramo cujos lados são congruentes. Logo, uma vez conhecida a medida do lado e a altura relativa a esse lado, sua área é dada pelo produto da base pela altura.

Vamos ver, agora, como fazer para calcular a área de um losango se soubermos as medidas de suas diagonais d_1 e d_2.

Agora faça você

A idéia é decompor o losango L, da figura, em quatro triângulos congruentes e somar suas áreas. Para isso você terá que verificar que:

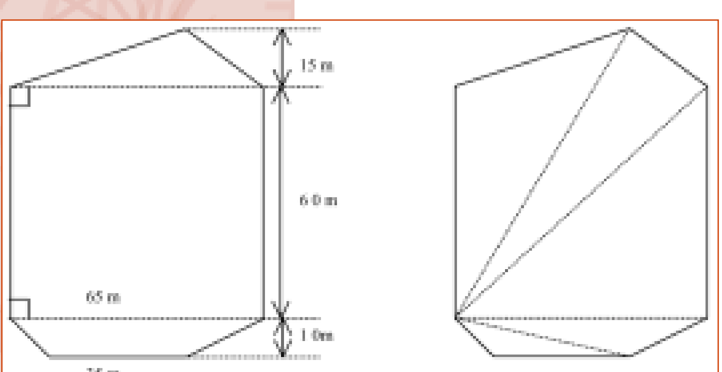


L: losango com diagonais d_1 e d_2.

Área de $L = \dfrac{d_1 d_2}{2}$

1. Se $ABCD$ é paralelogramo, as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ cortam-se no ponto médio.
2. As diagonais de um losango são perpendiculares.
3. Os quatro triângulos da figura são congruentes.
4. A área de cada triângulo é $\dfrac{1}{2}\dfrac{d_1}{2}\dfrac{d_2}{2}$.
5. Área de $L = 4\dfrac{d_1 d_2}{8}$

OUTROS POLÍGONOS



Uma região poligonal pode ser decomposta de várias maneiras diferentes e o cálculo de área depende dos dados de que dispomos. Sempre é possível dividir uma região poligonal em regiões triangulares, mas, muitas vezes, isso não facilita as contas.

Exemplo: Para calcular a área de um terreno foram tomadas algumas medidas, como podemos ver na figura ao lado, à esquerda.

Com essas medidas, podemos calcular a área A decompondo a figura em três partes: um triângulo, um retângulo e um trapézio. Fazendo as contas,

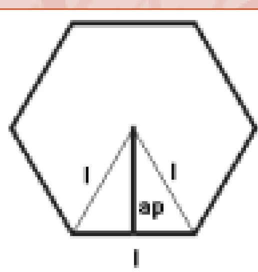
$$A = \frac{65.15}{2} + 65.60 + (65+35).\frac{10}{2}$$ e obtemos A = 4.887,5 m^2.

O cálculo seria diferente (chegando ao mesmo resultado!) se tivéssemos feito outra decomposição, como, por exemplo, a da figura da direita.

POLÍGONOS REGULARES

Um polígono regular é um polígono com todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Para fazermos o cálculo de área de um polígono regular de n lados, podemos decompô-lo em n triângulos isósceles congruentes, cada um deles com um vértice no centro da circunferência circunscrita ao polígono.



P: polígono de lado ***l*** e apótema ***ap***

Área de

$P = n.\dfrac{l.ap}{2} = \dfrac{nl}{2}ap$

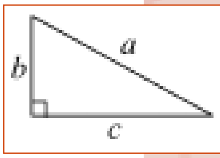
Se A e B são dois vértices consecutivos do polígono e O é o centro da circunferência em que estão inscritos os vértices, chamamos de *apótema* do polígono regular a medida da altura do triângulo AOB relativa ao lado . Denotando por l a medida do lado e por ap o apótema, a área de cada triângulo isósceles é $\dfrac{l.ap}{2}$.

Exemplo: Vamos determinar a área A do *hexágono regular* de lado *l*. Este é um caso especial, pois os ângulos centrais dos seis triângulos isósceles que compõem o hexágono têm medida igual a 60° e são, portanto, eqüiláteros. A área de cada triângulo eqüilátero é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ e, multiplicando por 6, obtemos $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$.

Agora faça você

Um hexágono regular *ABCDEF* tem área igual a 72 cm². Calcule a área do triângulo *ABC,* sabendo que *A, B* e *C* são vértices consecutivos do hexágono.

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA RELAÇÃO COM ÁREAS

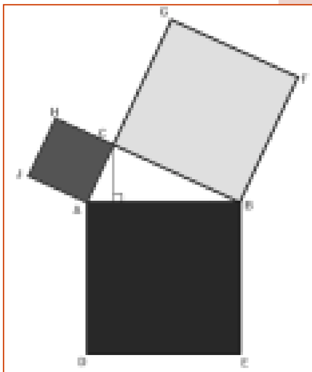


Teorema de Pitágoras
$a^2 = b^2 + c^2$

Talvez o teorema mais importante da Geometria elementar seja o teorema de Pitágoras, que Foi demonstrado algebricamente no Módulo 3.

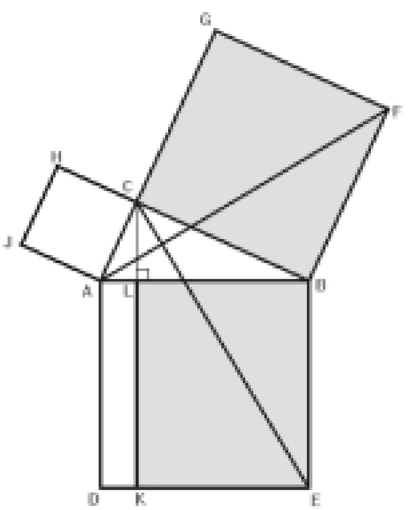
A primeira demonstração desse teorema é atribuída a Pitágoras, que a teria elaborado por volta de 525 a.C., mas hoje já não se conhece completamente tal demonstração.

Houve muitas provas diferentes para o teorema de Pitágoras e, talvez, uma das mais notáveis seja a de Euclides. Ele interpretou o teorema como soma de áreas de quadrados e demonstrou, através de congruências de triângulos, que a área do quadrado de lado com medida igual ao comprimento da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados com medidas iguais aos comprimentos dos catetos.

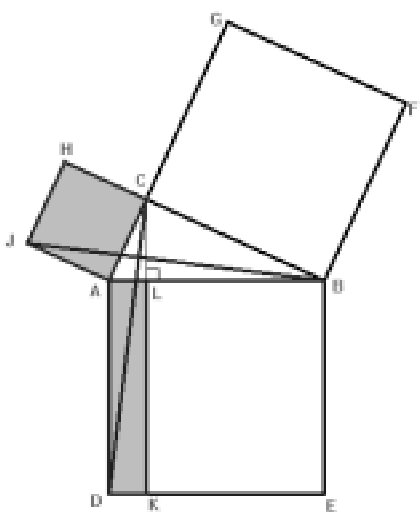


A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Vamos ver um esboço da demonstração atribuída a Euclides.



área *CBFG* = área *BEKL*

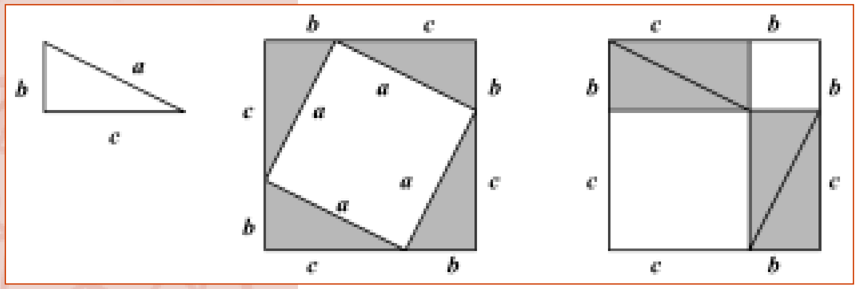


área *ACJH* = área *ADKL*

Observe, na figura acima à esquerda, que $\Delta ABF \cong \Delta EBC$ (por quê?) e, então, suas áreas são iguais. Além disso, no triângulo ΔABF, a altura relativa ao lado $\overline{BF}$ tem medida igual a *BC* e, portanto, área $\square CBFG = 2$ área ΔABF.

Da mesma forma, área □*BEKL* = 2 área Δ*EBC* e concluímos que área □*CBFG* = área □*BEKL*.

Com o mesmo procedimento, conclua, também, que área □*ACJH* = área □*ADKL* (figura à direita). Agora é só somar, pois área □*ADKL* + área □*BEKL* = área *ABDE*.



Na figura ao lado, podemos visualizar outra demonstração do teorema de Pitágoras, atribuída aos pitagóricos, em que é também utilizado o conceito de área.

À esquerda, temos um triângulo retângulo com catetos de medidas *b* e *c* e hipotenusa ***a.***

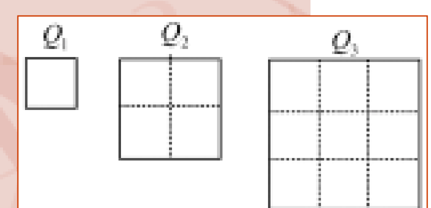
No centro e à direita, construímos quadrados com lados de medida *b* + *c* e, neles, marcamos em posições diferentes quatro triângulos congruentes ao triângulo original.

Observe na figura central que a área A do quadrado maior, de lado *b* + *c*, é igual à soma das áreas do quadrado menor, de lado *a*, com as áreas dos quatro triângulos retângulos.

Por outro lado, na figura da direita, podemos ver que a mesma área A é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores, de lados *b* e *c* com as áreas dos quatro retângulos.

Ou seja, a área branca na figura central é igual à área branca na figura da direita. Daí segue que a área do quadrado com lado igual à hipotenusa é igual à soma das áreas com lados iguais aos catetos.

ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES



Área de Q_2 = 4 . área de Q_1
Área de Q_3 = 9 . área de Q_1

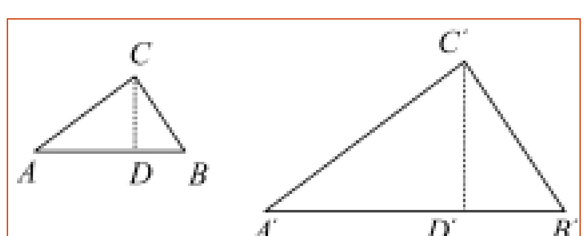
Na figura ao lado, o lado do quadrado Q_2 é o dobro do lado do quadrado Q_1 e o lado do quadrado Q_3 é o triplo do lado de Q_1. Veja o que acontece com as áreas.

Vamos verificar esse resultado para triângulos e polígonos.

Consideremos os *triângulos semelhantes* Δ*ABC* e Δ*A´B´C´* e seja *k* a razão de proporcionalidade entre os lados correspondentes, isto é $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k$.

Sejam $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$ as alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ respectivamente.

Pelo caso AA, de semelhança de triângulos, temos Δ*BCD* ~ Δ*B´C´D´* e, portanto $\frac{C'D'}{CD} = \frac{B'C'}{BC} = k$ ou seja, as alturas estão na mesma proporção: *C´D´*= *k CD*. Logo, área Δ*A´B´C´*= ½ *A´B´*. *C´D´*= ½ *kAB* . *kCD* = *k*² área Δ*ABC*.

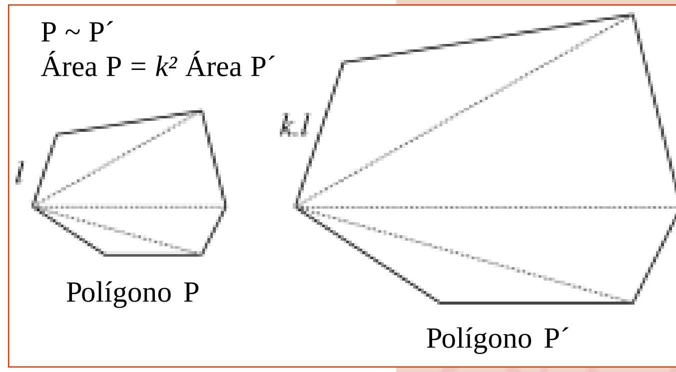


POLÍGONOS SEMELHANTES

Se a razão entre os lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é k, então a razão entre suas áreas é k^2.

Basta notar que todo polígono convexo com mais de três lados pode ser decomposto em triângulos.

> De modo geral: se a razão de proporcionalidade entre os lados correspondentes de duas figuras semelhantes é k, então a razão entre suas áreas é k^2.



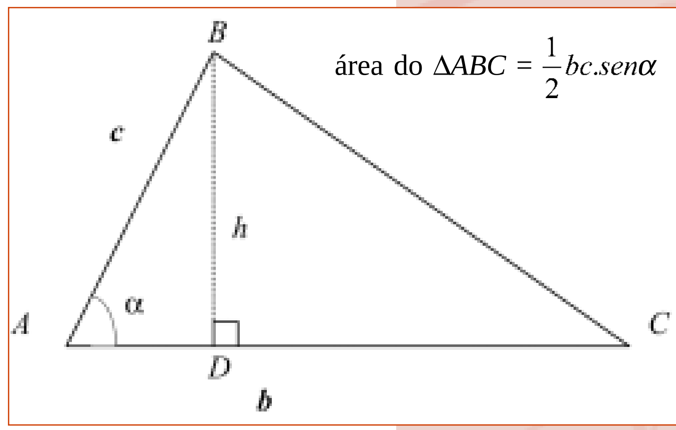
OUTRAS MANEIRAS DE DETERMINAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Nem sempre temos as informações de base e altura necessárias para o cálculo da área de um triângulo, mas outros dados também permitem calcular a área.

1. Seja o triângulo ABC da figura onde α é a medida do ângulo agudo de vértice A.

Sendo conhecidos o valor de sen α e as medidas dos lados $AC = b$ e $AB = c$, e denotando por h a medida da altura $\overline{BD}$, temos ΔBDA retângulo em D e, portanto sen $\alpha = \frac{h}{c}$. Logo,

área do $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc.sen\alpha$.



Conseqüência: Lei dos Senos

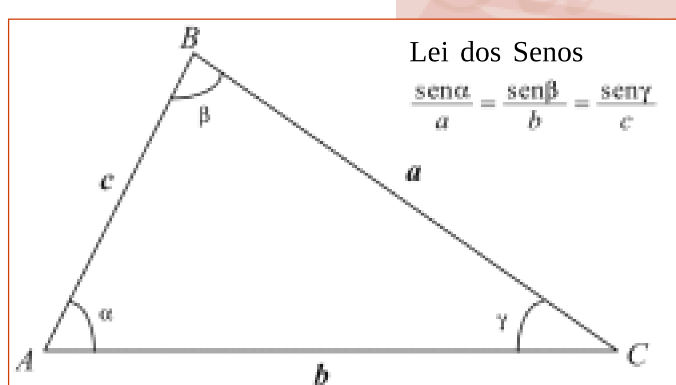
Ainda no triângulo ABC, sendo β a medida do ângulo de vértice B, a medida do ângulo de vértice C e $a = BC$.

Temos também:

área do $\Delta ABC = \frac{1}{2}\, ab.\text{sen}\beta = \frac{1}{2}\, ac.\text{sen}\gamma$.

Logo, $\frac{1}{2} bc.\text{sen } \alpha = \frac{1}{2} ac \text{ sen } \beta = \frac{1}{2} ab.\text{sen } \gamma$

Multiplicando a igualdade acima por dois e dividindo por abc, temos a Lei dos Senos:



2. Fórmula de Heron

Se são conhecidos os lados a, b e c do triângulo ΔABC e se denotarmos por s o seu semiperímetro, isto é: $s = \frac{a+b+c}{2}$,

então:

área do $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Não vamos apresentar a demonstração desta fórmula, pois ela é trabalhosa.

QUADRATURA DE FIGURAS PLANAS

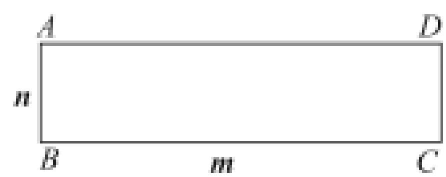
Na matemática grega, a Geometria exercia um papel muito importante, e tão fundamental que o produto de dois números a e b era associado à área de um retângulo cujos lados tinham a e b por medida.

A igualdade $a \cdot b = c^2$ era tratada ou como a proporção $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ e associada a uma divisão proporcional, ou como a igualdade entre a área do quadrado cujo lado mede c e a área do retângulo cujos lados medem a e b.

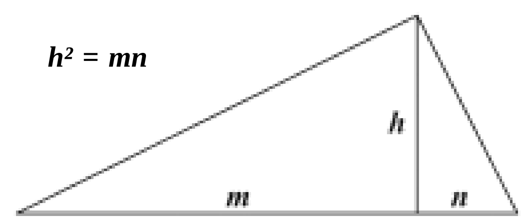
Surgem, dessa forma, os chamados problemas de quadratura: dada uma figura geométrica plana, como encontrar um quadrado equivalente a ela, ou seja, de tal forma que o quadrado e a figura tenham áreas iguais? Como os problemas de Geometria eram resolvidos, pelos gregos, com o auxílio da régua e do compasso, estava aí formulado um problema que só teve sua resposta, para o caso da quadratura do círculo, no século XIX, quando foi provado ser impossível realizar essa quadratura apenas com os instrumentos euclidianos.

No entanto, os gregos sabiam encontrar a solução para a quadratura de muitas figuras geométricas planas. Vejamos alguns exemplos:

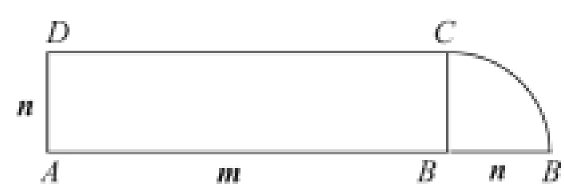
Problema 1. Construir um quadrado equivalente ao retângulo $ABCD$ de lados com medidas iguais a m e n.



Uma pista da resolução do problema está no Módulo 3, onde vimos, entre as relações métricas no triângulo retângulo, aquela que relaciona a altura relativa à hipotenusa com as projeções dos catetos.

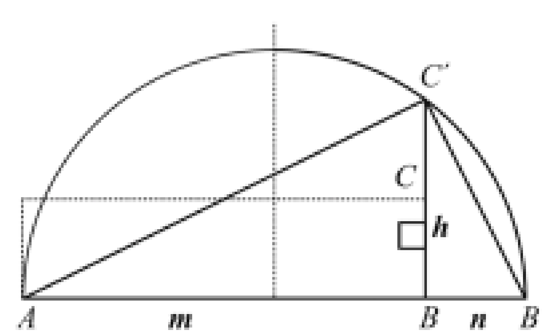


Para a construção do triângulo retângulo conveniente, primeiramente transferimos a medida do segmento $\overline{BC}$ para a reta determinada por A e B, obtendo o ponto B' tal que $AB' = m + n$.



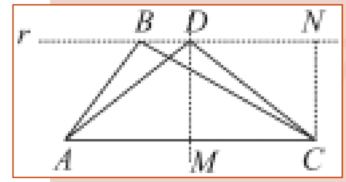
Em seguida, construímos uma semi-circunferência com diâmetro $\overline{AB'}$ e prolongamos o segmento $\overline{BC}$ até encontrar a semi-circunferência em C'. O triângulo $\Delta AC'B'$ é retângulo em C', conforme vimos na Unidade I, e $\overline{BC'}$ é altura relativa à hipotenusa.

Então, $(BC')^2 = mn$ e o quadrado com lado de medida igual BC' é o quadrado procurado.



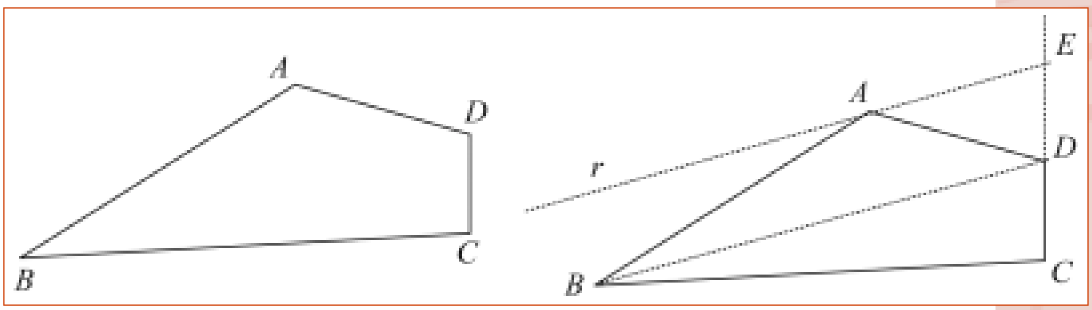
Problema 2. Construir um quadrado com área igual à de um triângulo ΔABC.

O primeiro passo é construir um retângulo com a mesma área do triângulo ΔABC dado. Pelo vértice B traça-se a reta r, paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$. Sejam **s** a mediatriz de $\overline{AC}$, M o ponto médio desse segmento e seja $D = r \cap s$. O triângulo ADC é isósceles (por quê?) e tem mesma base e mesma altura do triângulo ABC.

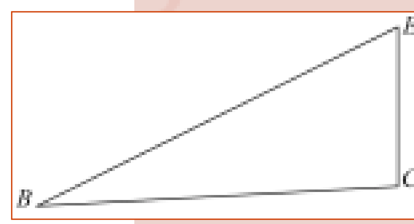


Logo, área ΔABC = área ΔADC = ½$AC.DM$ = $MC.DM$ = área do retângulo $MCND$. Agora, basta repetir a construção anterior e teremos um quadrado com a mesma área do ΔABC.

Problema 3. Construir um quadrado equivalente a um quadrilátero $ABCD$ dado.

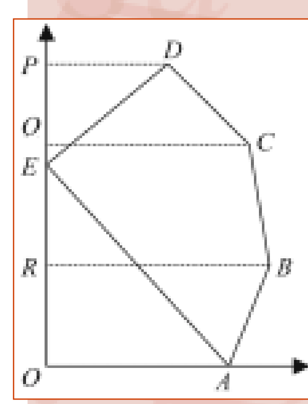


Na figura acima à direita , podemos observar que o quadrilátero □ABCD é equivalente à reunião dos triângulos ΔABD e ΔBDC. Além disso, sendo r paralela a $\overleftrightarrow{BD}$ por A, e E o ponto de intersecção de r com $\overleftrightarrow{CD}$, temos área ΔABD = área ΔEBD. Concluímos, então, que área □$ABCD$ = área ΔBDC + área ΔBDE = área ΔEBC. Agora é só obter a quadratura do ΔEBC, conforme vimos no item anterior.



Exercícios:

1. Um agrimensor determinou a área de um lote de terra $ABCDE$, cujo diagrama está ao lado. Ele traçou a reta paralela à direção norte-sul por E e as retas paralelas à direção leste-oeste por A, B, C e D. Descobriu que AO = 37m, BR = 47m, CQ = 42m, DP = 28m, PQ = 13m, QE = 7m, ER = 19m e RO=18m. Com esses dados, ele encontrou a área que queria. Calcule-a, agora, você.



2. Encontre uma expressão para a área de um retângulo em termos de sua diagonal d no caso em que a diagonal é o dobro da altura.

3. A área de um retângulo é 36 cm² e sua base excede de 5 cm sua altura. Determinar a altura do retângulo.

4. Determine as dimensões de um retângulo com 108 cm² de área, sendo a base igual ao triplo da altura.

5. As bases de um trapézio isósceles medem, respectivamente, 3 cm e 8 cm. Determinar a área desse trapézio sabendo que seu perímetro é igual a 24 cm.

6. A base maior de um trapézio é igual ao triplo da outra. Determinar as medidas dessas bases sendo 60 cm² a área do trapézio e 5cm a altura.

7. (MAPOFEI- 74) – As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60°. Achar a área do paralelogramo.

8. Determinar o lado de um quadrado, sabendo-se que se aumentarmos seu lado de 2 cm sua área aumenta de 36 cm².

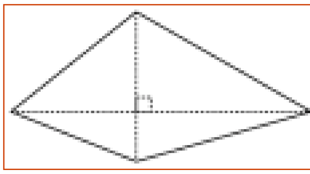
9. Determinar a área de um losango sendo 120 cm o seu perímetro e 36 cm a medida da sua diagonal menor.

10. O perímetro de um losango é de 60 cm. Calcule a medida de sua área sabendo que sua diagonal maior vale o triplo da menor.

11. Calcular a área de um retângulo, sabendo que cada as diagonalis medem 10 cm cada uma e formam um ângulo de 60°.

12. Um losango e um quadrado têm o mesmo perímetro. Determinar a razão da área do losango para a área do quadrado, sabendo que o ângulo agudo formado por dois lados do losango mede 60°.

13. Demonstre o seguinte teorema:



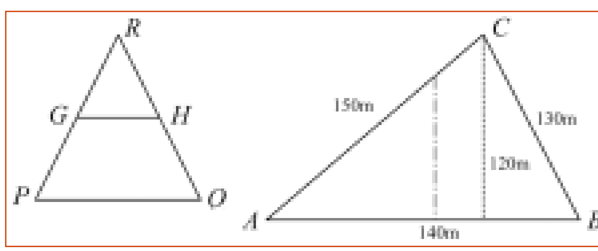
Se as diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares entre si, então a área do quadrilátero é metade do produto dos comprimentos das diagonais.

14. Um lado, de um de dois triângulos semelhantes, é cinco vezes maior que o lado correspondente do outro. Se a área do triângulo menor é 6 cm², qual é a área do maior?

15. As áreas de dois triângulos semelhantes são 16 e 25. Qual é a razão entre um par de lados correspondentes?

16. Qual deve ser o comprimento de um triângulo eqüilátero para que sua área seja o dobro da área de um triângulo eqüilátero de lado 10?

17. No ΔPQR da figura (ao lado) à esquerda, G é o ponto médio de $\overline{PR}$ e H é o ponto médio de $\overline{QR}$. Qual é a razão entre a área do ΔGHR e a área do ΔPQR?



18. Um terreno triangular tem lados de comprimentos 130 m, 140 m e 150 m, conforme está indicado na figura ao lado, à direita. O comprimento da perpendicular que liga o vértice C ao lado de 140 m é 120 m. Deve-se fazer uma cerca perpendicular ao lado de 140 m, de modo que o terreno fique dividido em duas partes de mesma área. A que distância do ponto A, ao longo de $\overline{AB}$ deve ser traçada essa perpendicular?

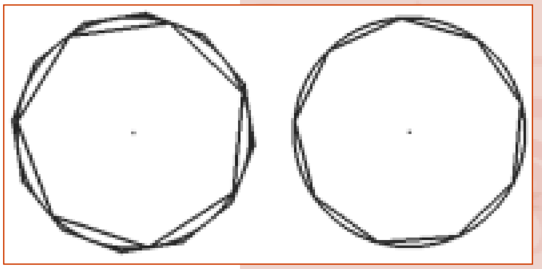
19. (FUVEST) – Em um triângulo T, os catetos medem 10 m e 20 m. A altura relativa à hipotenusa divide T em dois triângulos, cujas áreas, em m², são:

a) 10 e 90
b) 20 e 80
c) 25 e 75
d) 36 e 64
e) 50 e 50

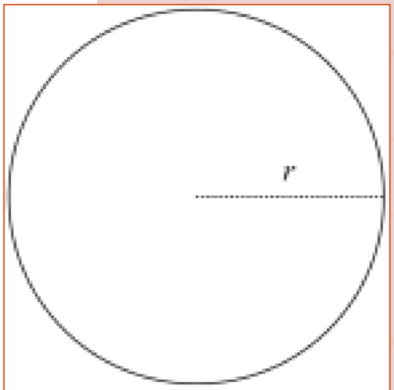
ÁREA DO CÍRCULO

Há cerca de 2.500 anos atrás os gregos já sabiam encontrar a área de qualquer polígono dividindo-o em triângulos, como na figura, e somando, em seguida, as áreas obtidas. No entanto, é muito mais difícil achar a área da região limitada por uma figura curva, como, por exemplo, um *círculo*, ou seja, a região limitada por uma circunferência. Os antigos gregos usavam, nesse caso, o chamado método da exaustão, que consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos e então aumentar o número de lados deles.

A figura ilustra esse procedimento no caso de um círculo com polígonos regulares inscritos.



Seja A_n a área do polígono com n lados. À medida que aumentamos n, fica evidente que A_n ficará cada vez mais próxima da área do círculo. Podemos dizer que a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos inscritos. Os gregos não usavam explicitamente limites, mas por um raciocínio indireto, Eudoxo (século V a .C.) usou a exaustão para provar que a área do círculo de raio r é $A = \pi r^2$.



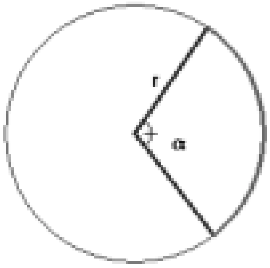
C: círculo de raio r

Área de C = πr^2

Para chegar à conclusão de Eudoxo, basta lembrar que a área do polígono regular de n lados de medida igual a l e apótema a é: $A_n = n\frac{la}{2} = \frac{nl}{2}a$ e observar que nl é o perímetro do polígono. À medida que aumentamos o número n de lados do polígono, o perímetro do polígono nl aproxima-se do perímetro $2\pi r$ da circunferência em que ele está inscrito, e o apótema a aproxima-se do raio da circunferência. Então, a área A_n aproxima-se de πr^2.

ÁREA DE SETOR CIRCULAR

Um *setor circular* é uma parte do círculo limitada por dois raios. A área do setor é proporcional ao comprimento do arco e, portanto, é proporcional ao ângulo central. Se a medida do ângulo central é α, em radianos, então:



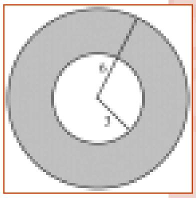
$2\pi r \; \ldots \; \pi r^2$

$\alpha r \; \ldots \; \frac{\alpha r^2}{2}$

S: setor de raio r e abertura α

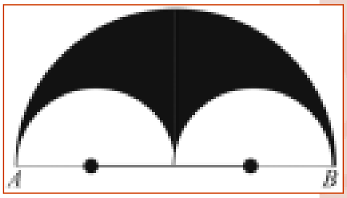
Área de S: $\frac{\alpha r^2}{2}$

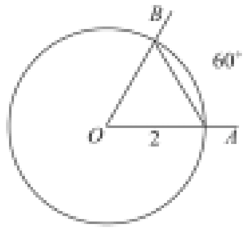
Agora faça você



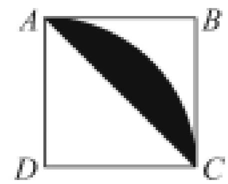
1. Calcule a área da coroa circular da figura ao lado. Os raios são iguais a 3 cm e 6 cm.

2. Na figura, o diâmetro de cada uma das circunferências menores é igual ao raio da semi-circunferência maior. Sabendo-se que o diâmetro da circunferência maior é igual a 4 cm, calcule a área da região sombreada.



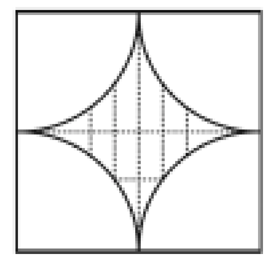


3. Calcule a área da região limitada pelo segmento $\overline{AB}$ e pelo menor arco determinado pelos pontos A e B da figura ao lado.



4. O quadrilátero ABCD é um quadrado de lado 2 cm e o arco de circunferência tem o seu centro no vértice do quadrado. Calcule a área da região sombreada.

5. (CESGRANRIO-RJ) A região sombreada R da figura é limitada por arcos de circunferência centrados nos vértices do quadrado de lado 2l. A área de R é:



a) $\frac{\pi}{2}l^2$

b) $(\pi - 2)l^2$

c) $\left(\pi - \frac{4}{3}\right)l^2$

d) $(4-\pi)l^2$

e) $\sqrt{2}\ l^2$

7. (FUVEST) Um comício político lotou uma praça semicircular de 130 m de raio. Admitindo-se uma ocupação média de 4 pessoas por m², qual é a melhor estimativa do número de pessoas presentes?

a) Dez mil.

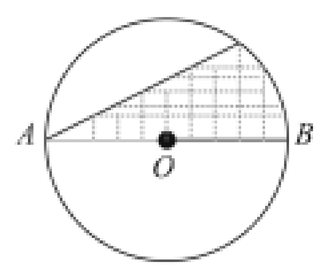
b) Cem mil.

c) Meio milhão.

d) Um milhão.

e) Muito mais que um milhão.

8. Na figura ao lado, o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência de centro *O* mede 8 cm e o ângulo *BAC* mede 30°. Calcule a área da região hachurada.



ALGUNS EXERCÍCIOS DO VESTIBULAR

1. (FUVEST-93) Os pontos B, P e C pertencem a uma circunferência γ e $\overline{BC}$ é lado de um polígono regular inscrito em γ. Sabendo-se que o ângulo $\angle$BPC mede 18º podemos concluir que o número de lados do polígono é igual a:

a) 5

b) 6

c) 7

d) 10

e) 12

2. (FUVEST-94) Considere um arco AB de 110º numa circunferência de raio 10cm. Considere, a seguir, um arco A'B' de 60º numa circunferência de raio 5 cm . Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo do arco A'B' (ambos medidos em cm) obtém-se:

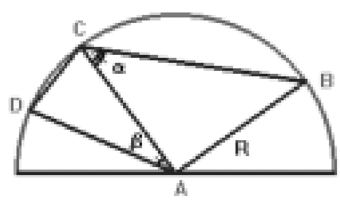
a) 11/6
b) 2
c) 11/3
d) 22/3
e) 11

3. (FUVEST-94) A, B e C são pontos de uma circunferência de raio 30 cm, AB = AC e o ângulo ∠ABC mede 30º.

a. Calcule, em cm, o comprimento do segmento $\overline{AC}$.
b. Calcule, em cm2, a área do triângulo ΔABC.

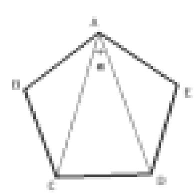
4. (FUVEST-01) Na figura ao lado, o quadrilátero *ABCD* está inscrito numa semi-circunferência de centro A e raio $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = R$. A diagonal $\overline{AC}$ forma com os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ ângulos α e β, respectivamente. Logo, a área do quadrilátero *ABCD* é:

a) R^2 (sen 2α + sen β) / 2
b) R^2 (sen α + sen 2β) / 2
c) R^2 (cos 2α + sen 2β) / 2
d) R^2 (sen α + cos β) / 2
e) R^2 (sen 2α + cos β) / 2



5. (FUVEST-99) Na figura abaixo, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo α é:

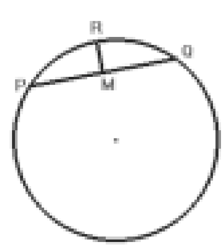
a) 32º
b) 34º
c) 36º
d) 38º
e) 40º



6. (FUVEST-00) São dados os pontos A e B. Usando a régua e o compasso, construa a circunferência circunscrita a um polígono regular de 12 lados que tem o segmento $\overline{AB}$ como um de seus lados. Descreva e justifique as construções utilizadas.

7. (FUVEST) Na figura abaixo, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e PQ = 8. O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e RM = $4\sqrt{3}/3$. Calcule:

a) O raio da circunferência.
b) A medida do ângulo ∠POQ, onde O é o centro da circunferência.



Unidade 3

Geometria espacial

Organizadores

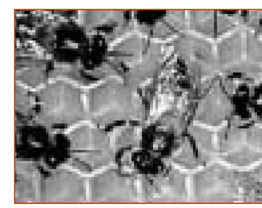
Antônio Carlos Brolezzi

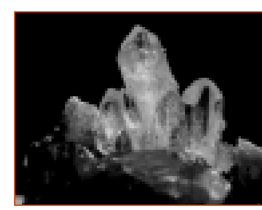
Elvia Mureb Sallum

Martha S. Monteiro

Elaboradora

Maria Elisa Galvão





Quando estudamos Geometria Espacial, buscamos estudar modelos para as figuras e formas geométricas que estão à nossa volta, na natureza e nas construções, com as quais interagimos desde os tempos mais remotos. Entre árvores e montanhas, vales e planícies, contornando ou controlando o curso dos rios, o homem construiu templos, pirâmides, castelos, barragens, grandes e pequenas cidades, onde as formas geométricas em suas múltiplas possibilidades foram e são exploradas até os dias atuais.

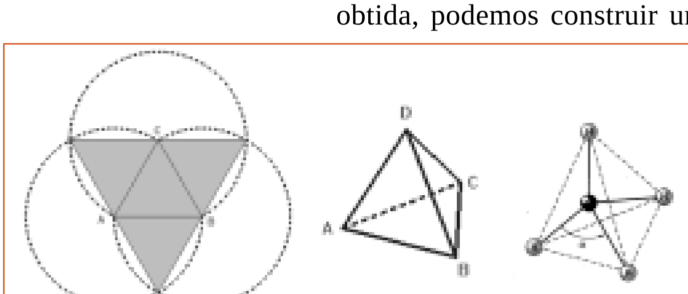
Os favos das abelhas e as estruturas dos cristais nos dão belíssimos exemplos. Da esfera celeste dos antigos às estruturas poliédricas utilizadas para descrever modelos atômicos, as várias formas geométricas que estudaremos estão presentes sob diversos aspectos.

A organização desse estudo se apresenta sob dois aspectos distintos: a Geometria Métrica e a Geometria de Posição. Vamos analisar alguns exemplos que podem ser utilizados para introduzir o estudo da Geometria Espacial em cada uma dessas direções. Começaremos escolhendo as figuras geométricas mais simples da Geometria Plana para construir as figuras espaciais.

Os tetraedros

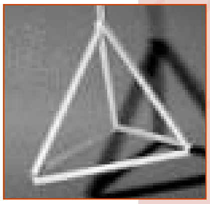
Os *tetraedros* são figuras geométricas que podem ser construídas reunindo-se adequadamente quatro triângulos. Podemos chamá-los também de pirâmides triangulares.

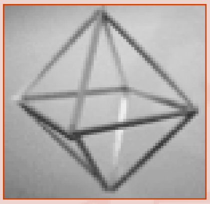
Utilizando a construção do triângulo equilátero que já conhecemos e, sobre cada um de seus lados, tomando novos triângulos também eqüiláteros, conforme a figura abaixo, temos uma *planificação* (isto é, uma representação plana) para a superfície do chamado *tetraedro regular*. Recortando a figura obtida, podemos construir um modelo espacial para esse tetraedro.



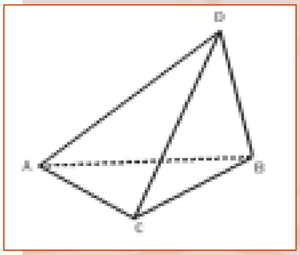
A terceira figura ao lado ilustra a estrutura da molécula de *metano*, cuja fórmula é CH_4. O átomo de carbono está no centro do tetraedro e as quatro moléculas de hidrogênio dispostas em seus quatro vértices.

Modelos para os poliedros também podem ser construídos utilizando canudos ou varetas, como na figura ao lado:





Um tetraedro, em geral, é o poliedro que tem quatro faces triangulares, quatro vértices e seis arestas (os vértices coincidem com os do triângulo e as arestas são lados comuns a dois triângulos). Observamos que:



- cada par de vértices determina exatamente uma aresta;
- cada três vértices determinam uma face;
- duas faces que têm um vértice em comum têm exatamente uma aresta em comum;
- dados dois vértices de uma face, a aresta determinada por eles é um lado desta face.

As propriedades acima que podemos observar no tetraedro são as chamadas propriedades de *incidência* que admitimos para trabalhar na *Geometria Euclidiana Espacial*, e vamos, desta forma, tratar brevemente do que em geral chamamos *Geometria de Posição.*

Temos também algumas informações sobre a *posição relativa de retas*, pois encontramos, no tetraedro:

- retas *concorrentes* (e, portanto, *coplanares*), se considerarmos as retas que contêm as arestas com um vértice comum;
- três retas *concorrentes em um ponto, duas a duas coplanares***,** se considerarmos as retas determinadas pelas três arestas (ou três lados) de uma mesma face;
- pares de retas *reversas*, se considerarmos as retas que contêm, por exemplo, as arestas opostas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do tetraedro.

DESENHE E CONSTRUA

Desenhe uma planificação, construa um tetraedro em papel cartão e identifique as retas com as propriedades acima destacadas.

Algumas questões interessantes

- Dadas duas retas quaisquer no espaço, quais são as possibilidades para sua intersecção e sua posição?
- Dadas três retas quaisquer no espaço, quais são as possibilidades para sua intersecção e sua posição?

Cada uma das faces triangulares do tetraedro determina um *plano* no espaço, o plano que contém os três vértices e sobre o qual o seu modelo construído em cartão "se apóia".

Cada vértice do tetraedro é determinado pela intersecção de três planos distintos, ou seja, pelo encontro dos planos que contêm as faces que têm esse vértice em comum.

Procure responder agora:

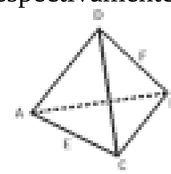
- Dada uma reta e um plano no espaço, quais são as possibilidades para sua intersecção e sua posição?
- Dados dois planos quaisquer no espaço, quais são as possibilidades para sua intersecção e sua posição?
- Dados três planos quaisquer no espaço, quais são as possibilidades para sua intersecção e sua posição?

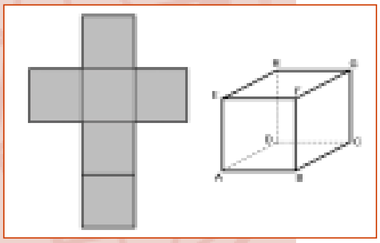
Faça alguns cálculos:

1. Calcular a medida da altura de um tetraedro regular sabendo que o perímetro da base mede 9 cm.

2. (FuvestUVEST) Na figura, ABCD é um tetraedro regular de lado *a*. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, o valor de EF é:

a) a/2 d) $a\sqrt{3}/2$
b) $a\sqrt{2}/2$ e) $a\sqrt{3}/4$
c) $a\sqrt{2}/4$





O CUBO OU HEXAEDRO REGULAR

O cubo é, sem dúvida, o poliedro regular mais conhecido, formado por seis faces quadradas, reunidas três a três em oito vértices. Uma planificação para o cubo que pode ser usada para montá-lo é dada pela figura a seguir. Podemos também estudá-lo como um especial paralelepípedo retângulo, cujas faces são retângulos (veremos a seguir).

As retas que contêm as arestas nos dão exemplos de: retas concorrentes, retas paralelas, três paralelas não contidas todas em um mesmo plano e retas reversas. Identifique essas retas, construindo um modelo, se necessário.

Podemos também discutir o *perpendicularismo* e encontrar vários exemplos de *reta perpendicular comum a duas retas reversas*. Por exemplo, a reta $\overleftrightarrow{AE}$ é perpendicular tanto à reta $\overleftrightarrow{AB}$ quanto à reta $\overleftrightarrow{EH}$, e $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EH}$ são retas reversas.

Observe ainda que no cubo constatamos um resultado importante:

Duas retas reversas sempre estão contidas em planos paralelos.

Quanto à *posição relativa dos planos* que contêm as faces do cubo, encontramos, por exemplo, planos paralelos, ou dois planos paralelos cortados por um terceiro plano segundo retas paralelas.

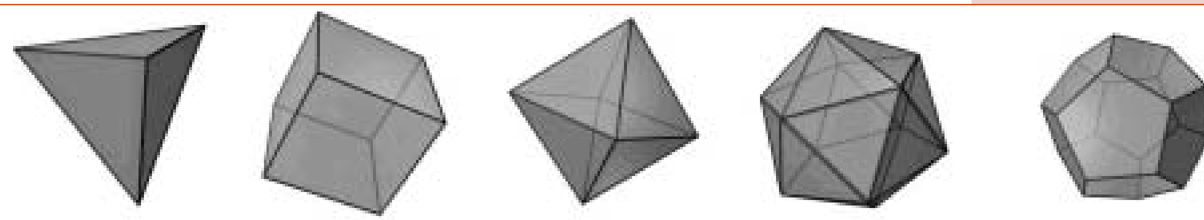
OUTROS POLIEDROS REGULARES

O tetraedro e o cubo são exemplos de figuras geométricas que chamamos, em geral, de *poliedros*. Os poliedros são construídos reunindo-se polígonos planos (a que chamamos *faces*) de forma que cada lado de um desses polígonos é também lado de um e somente um outro polígono. Duas faces quaisquer têm em comum, no máximo, um vértice ou um lado. Os vértices e as arestas são, respectivamente, os vértices e lados das faces.

Um poliedro pode ser uma figura geométrica bastante interessante, se escolhermos combinações de vários tipos de polígonos, como nos exemplos ao lado.

Os chamados *poliedros regulares* são bem conhecidos desde a Antiguidade, sendo também chamados de *poliedros platônicos*, pois foram estudadas por Platão, que viveu em Atenas por volta de 400 a.C. Algumas de suas propriedades de construção que utilizaremos estão em um trabalho chamado *Timeu*. Fascinado pela perfeição desses poliedros, Platão, em sua teoria, associou quatro deles aos quatro elementos: fogo, ar, água e terra, considerados "as raízes de todas as coisas" pelo filósofo Empédocles (495-435 a.C).

O *fogo* era associado ao *tetraedro regular*, a *terra* ao *cubo* ou *hexaedro* regular, o *ar* ao *octaedro regular* (oito faces triangulares) e a *água* ao *icosaedro regular* (vinte faces triangulares). O último poliedro regular conhecido, segundo Platão, "foi usado para sustentar as constelações no céu", pois o dodecaedro regular tem 12 faces supostamente associadas aos signos do zodíaco.

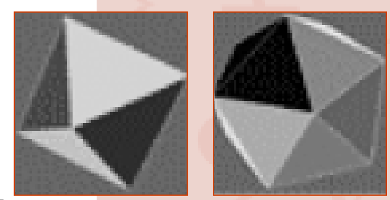


Tetraedro Regular (fogo) | Hexaedro Regular (terra) | Octaedro Regular (ar) | Icosaedro Regular (água) | Dodecaedro Regular (Esfera Celeste)

Um poliedro será *regular* se:

- todas as suas faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados;
- em cada vértice concorrem o mesmo número de arestas.

Desde os tempos de Platão, sabe-se que existem apenas os cinco poliedros regulares representados acima.



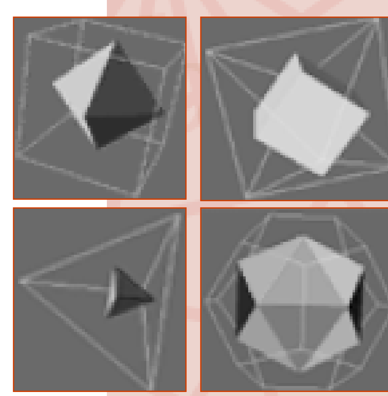
Para construí-los, podemos começar com as faces triangulares: teremos o tetraedro regular, reunindo três triângulos em cada vértice, o octaedro regular, reunindo quatro triângulos em cada vértice e o icosaedro regular, reunindo-os em número de cinco em cada vértice. Em cada vértice estaremos formando um ângulo poliédrico.

Seis triângulos eqüiláteros reunidos formam um hexágono, que é plano; logo, não será mais possível continuar o processo.

O hexaedro tem faces quadradas reunidas três a três nos vértices.

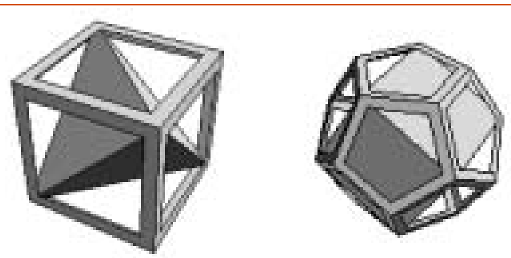
O dodecaedro tem faces pentagonais também reunidas três a três. Verifique que esse é o maior número de faces desse tipo que podemos reunir num mesmo vértice.

Agora faça você:



Construa uma planificação para o octaedro e para o icosaedro, usando triângulos eqüiláteros. Construa também uma planificação para o dodecaedro (a sugestão para a construção do pentágono usando régua e compasso se encontra no Módulo 3).

Existem algumas relações entre os poliedros regulares, ilustradas pelas figuras ao lado. Tomando o centro de suas faces, obtemos ou um poliedro semelhante (como no tetraedro) ou o chamado *poliedro dual* (demais poliedros nas figuras ao lado).



Tetraedro e Cubo | Cubo e Dodecaedro

As figuras á esquerda ilustram outras relações interessantes que podemos obter entre os poliedros regulares.

Para cada um dos poliedros regulares, podemos contar o número de vértices, arestas e faces, verificando algumas relações interessantes. Os dados dessa contagem estão reunidos na tabela abaixo:

Poliedro	Tipo de Face	Número de Faces	Arestas	Vértices
Tetraedro regular	Triângulo equilátero	4	6	4
Hexaedro Regular	Hexágono regular	6	12	8
Octaedro Regular	Triângulo equilátero	8	12	6
Dodecaedro Regular	Pentágono Regular	12	30	20
Icosaedro Regular	Triângulo equilátero	20	30	12

O número de arestas (A) é dado por: $\boxed{A = F.\, n\, /\, 2}$

onde F é o número de faces e n o número de lados de cada face. O produto $F.n$ dá o número total de lados dos polígonos que compõem o poliedro, e esses lados são "colados" dois a dois – daí a divisão por 2.

O número V de vértices também pode ser calculado por uma fórmula semelhante: $\boxed{V = A\, .\, p\, /\, 2}$

onde agora p é o número de arestas que concorrem em cada vértice.

Finalmente, observamos que vale, para os poliedros regulares, a chamada *relação de Euler*, descoberta pelo famoso matemático do século XVIII (que viveu entre 1707 e 1783): $\boxed{V + F - A = 2}$

A relação de Euler é válida para todos os poliedros convexos, que são aqueles em que os planos que contêm as faces não intersecta o poliedro.

Agora faça você:

1. Para cada um dos poliedros regulares, utilizando as fórmulas e as informações do texto, confira os dados da tabela e verifique a relação de Euler.

2. Sabe-se que um poliedro convexo tem dez vértices triédricos (ou seja, vértices em que se encontram três arestas). Calcule:

a) o número de arestas; b) o número de faces.

3. Calcule a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo que tem seis faces quadrangulares.

4. (ITA) Se um poliedro convexo possui 20 faces e 12 vértices, encontre o número de arestas desse poliedro.

5. (PUC-SP) Um poliedro de Platão não pode ter:

a) faces triangulares
b) faces quadrangulares
c) faces pentagonais
d) faces hexagonais
e) ângulos pentaédricos (vértices em que concorrem cinco arestas)

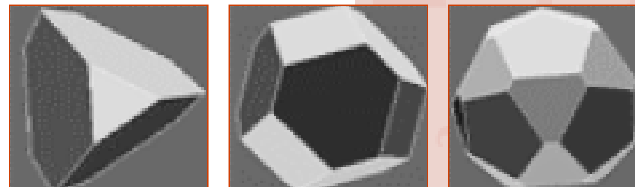
6. (CESESP-PE) Considere os seguintes poliedros regulares:

A_1 - Tetraedro A_2 - Dodecaedro A_3 - Icosaedro

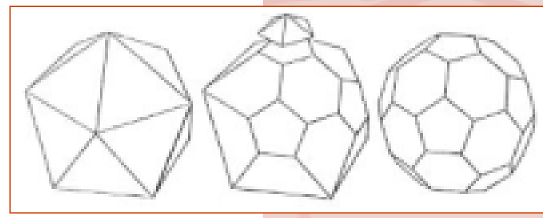
Assinale, entre as seguintes alternativas, a falsa.

a) o poliedro A_1 tem as faces triangulares.
b) o poliedro A_2 tem 12 faces.
c) o poliedro A_3 tem as faces triangulares.
d) o poliedro A_2 tem as faces em forma de dodecágono.
e) o poliedro A_3 tem 20 faces.

Poliedros arquimedianos



Também chamados de semi-regulares, os poliedros arquimedianos podem ser obtidos cortando-se os poliedros regulares por planos à mesma distância dos vértices. Temos alguns exemplos nas figuras ao lado.



Um exemplo importante de poliedro arquimediano é o chamado *icosaedro truncado*, obtido cortando-se as arestas de um icosaedro à mesma distância dos vértices. Como temos cinco triângulos (ou cinco novas arestas) em cada vértice, as figuras resultantes nesses cortes serão pentágonos e hexágonos.

Os vértices desse poliedro estão associados à distribuição dos átomos da molécula do Carbono 60 (C_{60}). Também encontramos essa combinação nas bolas de futebol, como vemos na ilustração abaixo. Para fazer uma bola, deveremos cortar hexágonos e pentágonos de couro ou outro material equivalente, e depois uni-los por costuras.

Ao lado, temos um modelo para a planificação da bola de futebol.

Agora faça você:

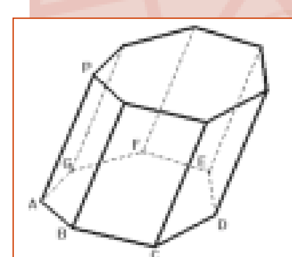
Para montar uma bola de futebol com couro preto e branco, quais e quantas peças deverá recortar de cada cor? Quantas costuras terá que fazer? Como ficará a distribuição das peças?

Figura renascentista

Ilustrações interessantes, da época do Renascimento, se utilizam dos poliedros regulares como elementos de sua composição.

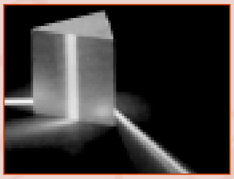
Prismas, Cilindros, Pirâmides e Cones

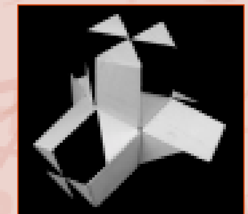
Os *prismas* são figuras geométricas com as quais convivemos diariamente, pois estão presentes nas nossas casas, nas embalagens e em muitos objetos de uso geral.

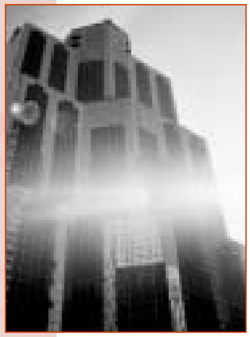


Para construirmos um prisma, tomamos como figura geométrica de partida um polígono (ABCDEFG, na figura ao lado) e, num plano paralelo ao plano que o contém, escolhendo um ponto P qualquer, construímos um novo polígono cujos lados são paralelos aos do polígono dado.

Um prisma possui, portanto, duas faces que são polígonos congruentes (também chamadas *bases* do prisma) e *faces laterais* que são paralelogramos. Se *n* é o número de lados do polígono de partida, o número total de faces do prisma é *n+2*, o número de arestas é *3n* e o número de vértices é *2n.* Nas ilustrações a seguir vemos alguns prismas, combinações dessas figuras na forma de um que-







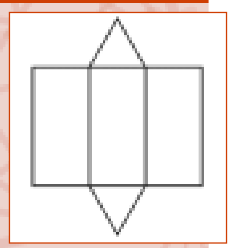
Fonte:
www.evsc.virginia.edu
www.johnrausch.com
www.prism.gatech.edu

bra cabeça ou num projeto arquitetônico e algumas de suas utilizações, como, por exemplo, para a conseguir a refração da luz.

Os prismas são, em geral, denominados segundo o polígono da base: temos os prismas triangulares, quadrangulares, pentagonais etc., conforme a base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc. Podem ser retos, quando as arestas são perpendiculares ao plano da base, ou oblíquos, caso contrário.

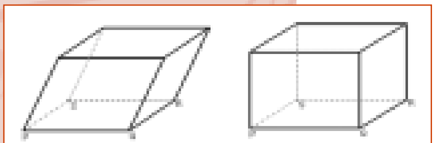
Construa:

Podemos montar um prisma triangular reto usando a planificação a seguir. Construa planificações para outros tipos de prisma reto.



Os prismas com os quais convivemos mais freqüentemente têm por base um paralelogramo PQRS, como os das figuras abaixo, e são particularmente denominados *paralelepípedos*.

Quando todas as faces são retângulos, temos o paralelepípedo que é chamado reto-retângulo, comumente encontrado em construções, embalagens e caixas que utilizamos no dia a dia. O *cubo* é um especial prisma, ou ainda, um especial paralelepípedo reto-retângulo.

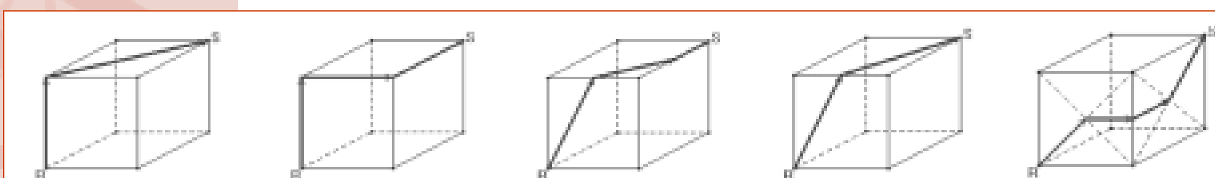


$V = a^3$ unidades de volume $V = a.b.c$ unidades de volume

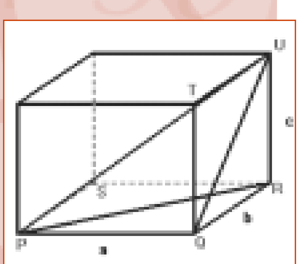
Muitas vezes, precisamos obter dados que envolvem as medidas de um paralelepípedo reto-retângulo. Quando vamos fazer as instalações elétricas ou de cabos para telefone ou televisão, interessa-nos gastar o mínimo possível. Para fazer esses cálculos, precisamos saber calcular os comprimentos dos vários segmentos que ligam pontos contidos nas faces, e o teorema de Pitágoras será bastante utilizado.

Agora faça você:

(CESGRANRIO) Dentre os caminhos ligando R a S, sobre a superfície do cubo, aquele de menor percurso é:



a) b) c) d) e)



Num paralelepípedo reto-retângulo, quando unimos dois vértices quaisquer, podemos ter a *diagonal de uma face* ($\overline{PR}$ ou $\overline{QU}$) ou a *diagonal do paralelepípedo* ($\overline{PU}$).

Para calcular o comprimento dessas diagonais, observamos que são hipotenusas de triângulos retângulos; logo,

$$PR^2 = a^2 + b^2$$

$$QU^2 = b^2 + c^2$$

$$PU^2 = PR^2 + RU^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

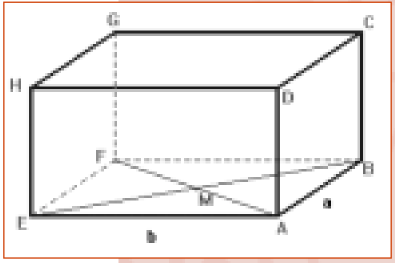
O comprimento D da diagonal do paralelepípedo será, então, dado por

$$D^2 = \sqrt{a_2 + b_2 + c_2}$$

Calcule agora:

1. Em um paralelepípedo reto-retângulo de largura 2 dm e comprimento $\sqrt{5}$ dm, uma diagonal mede 5 dm. Calcule a altura desse sólido.

2. (Fuvest) No paralelepípedo reto-retângulo da figura, sabe-se que $AB = AD = a$, $AE = b$ e que M é a intersecção das diagonais da face ABFE. Se a medida de $\overline{MC}$ também é igual a b, o valor de b será:



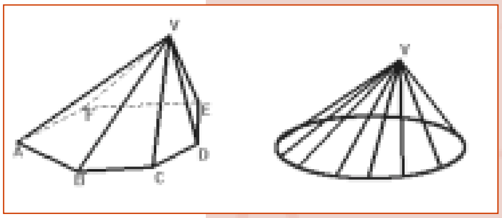
a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{7}{5}}$ d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

Podemos generalizar a noção de prisma e obter um *cilindro*, tomando como base uma curva plana fechada. Os segmentos paralelos que têm uma extremidade nos pontos da curva e a outra num plano paralelo ao plano da base são chamados agora *geratrizes* do cilindro. Temos a figura geométrica que, no dia a dia, é utilizada para as latas de alimentos, tubulações e caixas d'água, equipamentos mecânicos etc.

Da mesma forma que o prisma, os cilindros podem ser retos ou oblíquos, conforme a geratriz seja ou não perpendicular ao plano que contém a curva de base. O cilindro mais utilizado, na prática, é o cilindro que chamamos *circular reto*, cuja curva de base é uma circunferência.

cilindro oblíquo cilindro reto

Os *cones generalizados* também são definidos a partir de figuras geométricas planas. Essa figura geométrica será a *base* do cone e o seu *vértice* será um ponto não pertencente ao plano da figura. Temos também as *geratrizes* do cone que serão os segmentos que têm por extremos o vértice do cone e um ponto da sua base.



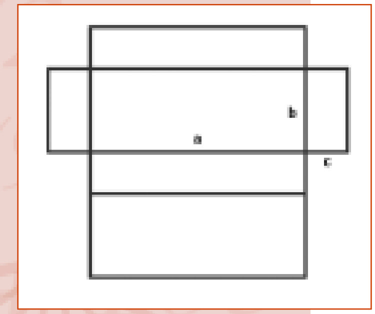
Quando a figura da base é um polígono, o cone generalizado é particularmente chamado de *pirâmide*, e é dita triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme a base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc., respectivamente.

Pelo vértice da pirâmide ou do cone, podemos considerar uma reta perpendicular ao plano da base, que o intercepta determinando um segmento que é a *altura* da pirâmide ou do cone. A pirâmide ou o cone são *retos* quando essa perpendicular passa pelo centro da base. Uma pirâmide é regular quando é reta e sua base é um polígono regular.

Os triângulos que têm em comum o vértice da pirâmide são chamados suas *faces laterais*. Uma pirâmide cuja base é um polígono de n lados tem $n+1$ faces, $2n$ arestas e $n+1$ vértices.

Áreas laterais e totais

Para construir uma caixa de papelão, precisamos saber, dadas as dimensões da caixa, qual será a quantidade de papelão necessária para a montagem. Quando vamos comprar tintas ou materiais de revestimento (pisos, azulejos etc.), precisamos saber qual é a área da superfície a ser pintada ou azulejada, ou seja, devemos distinguir a área das paredes da área do piso, incluir ou não a área do teto etc. Em alguns casos, precisamos trabalhar com as chamadas *áreas laterais*; em outros, interessa-nos a *área total*.



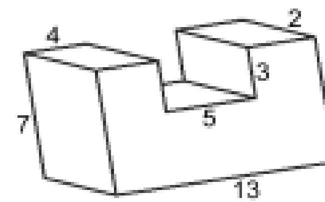
Se uma caixa tem a forma de um paralelepípedo, um modelo desmontado dela pode ser dado pela figura ao lado:

Podemos calcular a quantidade de papelão a ser gasta avaliando-se a área da planificação da caixa. Neste caso, temos seis retângulos, dois a dois congruentes, e a soma de suas áreas será:

$$\boxed{A = 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c}$$

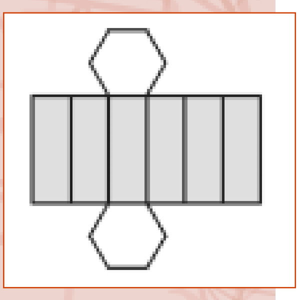
que chamamos a área total do paralelepípedo retângulo cujos lados medem *a*, *b* e *c*.

Agora faça você:



(MACK) A área total do sólido ao lado é:

a) 204 c) 222 e) 262
b) 206 d) 244



Temos, muitas vezes, interessantes embalagens de doces ou chocolates que têm a forma de um prisma hexagonal regular. A planificação desse prisma será como a figura ao lado.

Se escolhermos a cor ou o material das faces laterais diferente do utilizado para as bases, para estimar a quantidade de material a ser empregado faremos o cálculo da chamada *área lateral* do prisma que, no caso, será seis vezes a área da face lateral retangular.

A *área total* do prisma será a soma da área lateral com as áreas das bases.

Agora faça você:

Na planificação acima, o lado do hexágono mede 4 cm, e a aresta lateral do prisma 10 cm. Calcule a área lateral e a área total.

Quando o problema é saber o material gasto na fabricação de latas para alimentos, temos que trabalhar com os dados de um *cilindro circular reto*. A sua superfície lateral será um retângulo cujas dimensões serão o comprimento da circunferência da base e o comprimento da geratriz, que é a altura do cilindro.

A *área lateral do cilindro* será, então:

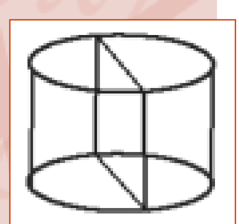
$\mathbf{A_L = 2\pi R.H}$

Para calcular a sua *área total*, juntamos as áreas das bases:

$\mathbf{A_T = 2\pi R.H + 2\,\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R)}$

Agora faça você:

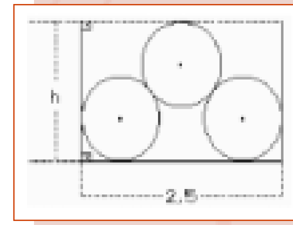
1. Um cilindro reto, cuja área da base é 16p cm² e altura 9 cm, será dividido em dois semicilindros, cortado por um plano que passa pelo centro do círculo da base. Calcule a área total de cada um dos semicilindros.



2.Um cilindro reto é eqüilátero se sua secção por um plano que contém os centros das bases (como na figura ao lado) é um quadrado. Encontre a área lateral e total de um cilindro eqüilátero cuja altura é 10 cm.

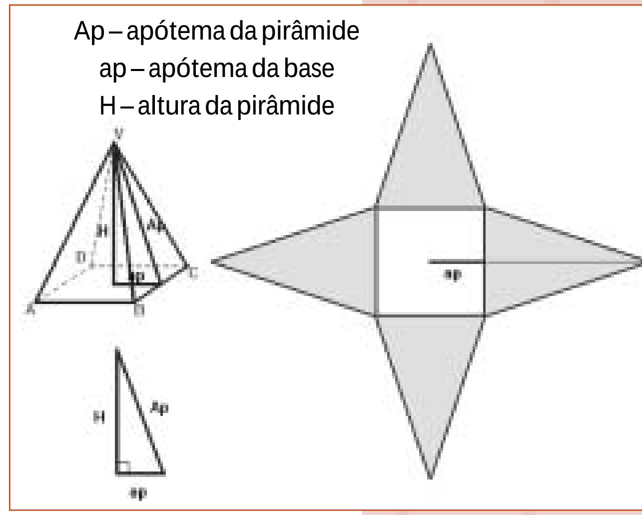
3. (UFMG) Para se construir uma lata cilíndrica de base circular, sem tampa, com 20 cm de diâmetro na base e 25 cm de altura, são gastos x cm² de material. O valor de x é:

a) 400π b) 600π c) 300π d) 700π e) 500π



4. (FUVEST) Um lenhador empilhou três troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura ao lado. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura h, em metros, é:

a) $(1 + \sqrt{7})/2$ b) $(1 + \sqrt{7})/3$ c) $(1 + \sqrt{7})/4$ d) $1 + \sqrt{7}/3$ e) $1 + \sqrt{7}/4$



Para as pirâmides e cones, utilizamos idéias semelhantes: podemos calcular a área lateral ou a área total, como ilustram as figuras ao lado.

No cálculo da área lateral da pirâmide, para calcular a área de cada face triangular deveremos ter a altura da face, que também é chamada de *apótema da pirâmide*. O apótema da pirâmide é, também, a hipotenusa do retângulo cujos catetos são a altura da pirâmide e o apótema da base. Na figura, temos o exemplo de uma pirâmide quadrangular regular onde estão destacados esses elementos.

Faça alguns cálculos:

1. (MAUÁ) Para medir a altura de uma torre vertical DE, toma-se, no plano horizontal que passa pela sua base D, o segmento $\overline{AB}$ de comprimento 12 m e cujo ponto médio é C. Mede-se, então, os ângulos $\angle DAE$, $\angle DBE$, $\angle DCE$, verificando-se que m $(\angle DAE)$ = m $(\angle DBE) = 45^o$ e m $(\angle DCE) = 60^o$. Determinar a altura da torre.

2. (CESCEM) Em uma pirâmide com 12 cm de altura, tendo como base um quadrado de lado igual a 10 cm, a área lateral é:

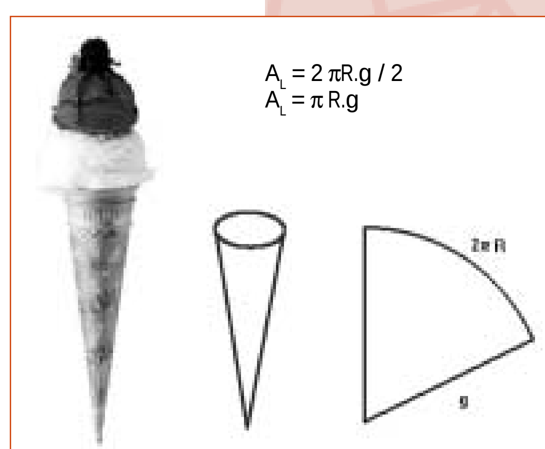
a) 240 cm^2 b) 260 cm^2 c) 340 cm^2 d) 400 cm^2 e) $20\sqrt{119}$ cm^2

3. A área lateral de uma pirâmide hexagonal regular é a 24 dm^2. Calcule a aresta da base, sabendo que a aresta lateral mede $\sqrt{5}$ dm.

4. (FUVEST) Um telhado tem a forma de superfície lateral de uma pirâmide regular de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver dez lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90 b) 100 c) 110 d) 120 e) 130

5. Uma pirâmide pentagonal de altura 24 cm tem área da base igual a 144 m². Secciona-se essa pirâmide com um plano paralelo à base a uma distância de 14 cm do vértice. Calcule a área da seção determinada.

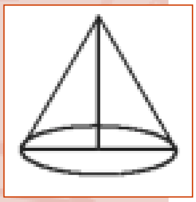


A embalagem de papel que protege a casquinha do sorvete é a superfície lateral de um cone. Se cortarmos essa embalagem por uma das geratrizes do cone, temos uma porção de um círculo que é chamada de setor circular. A área da embalagem será a área lateral do cone e será calculada como no caso de um triângulo cuja base mede $2\pi R$ e a altura mede g:

Para calcular a área total do cone, somamos a área da base, e temos:

$$\boxed{A_T = \pi Rg + \pi R^2 = \pi R(g + R)}$$

Agora faça você:



1. Um especial cone é o chamado *cone eqüilátero*, obtido quando giramos um triângulo eqüilátero em torno de sua altura.

a) Ache o raio da base de um cone eqüilátero cuja área lateral mede 128π cm^2.

b) Ache a geratriz de um cone eqüilátero cuja área total mede 768π cm^2.

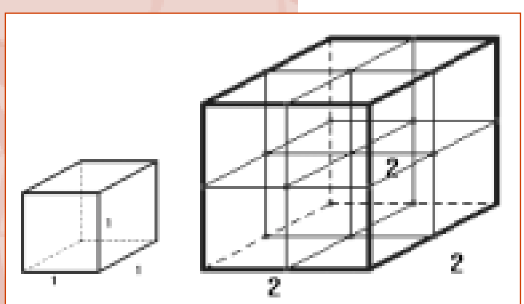
c) Encontre a razão entre a área total e a área lateral de um cone eqüilátero.

VOLUMES DE FIGURAS ESPACIAIS

Calcular volumes, assim como calcular áreas, é um problema muito antigo, motivado, por exemplo, pelas necessidades de comparar ou armazenar quantidades de grãos, água, etc., para o consumo ou o comércio. Hoje, se temos uma caixa d'água cilíndrica ou na forma de um paralelepípedo, para controlar o abastecimento e nosso gasto precisamos saber o volume da caixa e medir a quantidade de água que ela contém.

O problema geral é: dado um sólido poliédrico, determinar o seu volume. Muitos dos métodos que utilizamos hoje são exatamente os conhecidos desde a antiguidade.

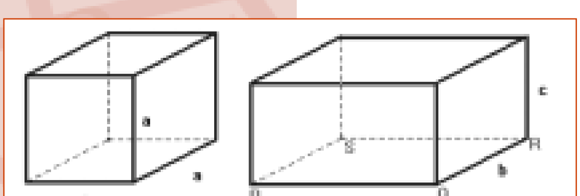
Para encontrar a área de uma figura plana, escolhemos como unidade de área um quadrado de lado unitário. Da mesma forma, para determinar o volume de uma figura espacial, precisamos estabelecer uma unidade de volume. A definição de uma função volume pode ser dada da mesma forma e com propriedades semelhantes às da função área.



A unidade de volume que vamos adotar será o cubo de lado unitário. Com base nesse padrão de medida, podemos verificar, examinando a figura a seguir, que, dado um novo cubo cuja aresta tem comprimento 2, podemos dividi-lo em oito cubos com lado unitário; desta forma, seu volume será $8 = 2^3$ unidades de volume.

Se continuarmos a experiência com um novo cubo com aresta medindo 3, a figura ficará mais complicada, mas poderemos contar $27 = 3^3$ cubos de lado unitário; logo, o volume será igual a 27 unidades de volume. Para cubos cuja aresta seja um número natural ou uma fração, ou seja, um número racional positivo p / q, podemos verificar que o volume será dado por

$$\boxed{V = (p / q)^3}$$



O processo pode ser generalizado para se obter como resultado uma fórmula para o volume $V = a^3$, para um cubo cujo lado tem medida a ou $V = a \cdot b \cdot c$ para um paralelepípedo reto-retângulo cujos lados medem a, b e c, números reais positivos quaisquer.

A unidade usual de volume é o m^3, ou suas frações dm^3, cm^3 e mm^3. É importante lembrar a relação entre as medidas de volume e de capacidade, ou seja, que um litro equivale a um cubo de 10 cm de aresta, ou seja, 1 dm^3. Uma caixa d'água com 1 m^3 = 1000 dm^3 de volume comportará, portanto, 1.000 litros de água.

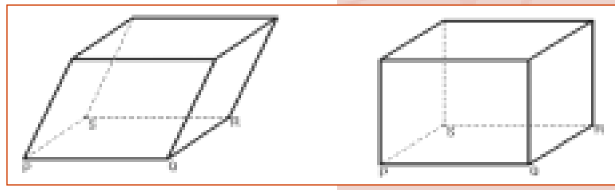
PARALELEPÍPEDOS

Um pilha de papel sulfite nos proporciona uma maneira simples e informal de observar o que ocorre com os volumes dos paralelepípedos oblíquos. Deslizando as folhas umas sobre as outras, a pilha originalmente empacotada como um paralelepípedo retângulo pode se transformar em um paralelepípedo oblíquo, ou ainda em sólidos com formas muito diferentes. O volume, no entanto, não muda, o que nos leva a supor que, de fato, o volume do paralelepípedo depende somente da área da sua base (a folha de papel, no nosso exemplo) e da altura (ou seja, do número de folhas que empilhamos).

Investigue

Uma garrafa de bebida com 30 cm de altura tem uma miniatura perfeitamente semelhante com 10 cm de altura. Se a miniatura tem 50 ml de volume, qual é o volume da garrafa original?

O problema, conhecido desde a antiguidade, foi definitivamente esclarecido a partir do trabalho de Bonaventura Francesco Cavalieri, um padre jesuíta que viveu no século XVII (entre 1598 e 1647). Baseado na idéia de que se, ao fatiarmos paralelamente dois sólidos ao mesmo tempo, obtivermos as fatias correspondentes com a mesma área, então os sólidos terão o mesmo volume, o Princípio de Cavalieri pode ser enunciado:



PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Dados dois sólidos e um plano, se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então os sólidos têm o mesmo volume.

O princípio de Cavalieri garante, portanto, que dois paralelepípedos, um reto e um oblíquo, com bases equivalentes e mesma altura, têm o mesmo volume, pois todas as suas secções correspondentes serão congruentes às respectivas bases; logo, terão a mesma área. A conclusão é:

O volume de um paralelepípedo é o produto da área da base pela altura.

Agora faça você:

1. Um paralelepípedo reto retângulo tem as arestas medindo 5 cm, 6 cm e 8 cm. Calcule, desse sólido:

a) a medida de uma diagonal; b) a área total; c) o volume.

2. Em um paralelepípedo reto retângulo de altura 2 dm e comprimento $\sqrt{5}$ dm, uma diagonal mede 5 dm. Calcule a altura desse sólido.

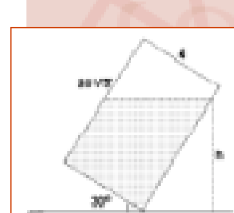
3. De quanto aumenta o volume de um cubo, em cm^3, se a aresta de um metro é aumentada de 1cm?

4. A medida da superfície total de um cubo é 726 cm^2. De quanto devemos aumentar sua diagonal para que o volume aumente de 1413 cm^3?

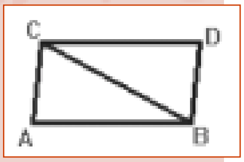
5. Enche-se um recipiente cúbico com água. Dado que um galão de líquido tem um volume de 21.600 cm^3 e sendo 120 cm a aresta do recipiente, calcular o número de galões que o recipiente pode conter.

6. A base de um paralelepípedo reto é um losango de 60 cm^2 de área. As áreas das seções diagonais do paralelepípedo são 72 cm^2 e 60 cm^2. Determine o volume do paralelepípedo.

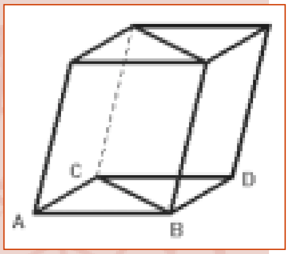
7. (FUVEST) Um bloco retangular (isto é, um paralelepípedo reto-retângulo) de base quadrada de lado 4 cm e altura $20\sqrt{3}$, com 2/3 do seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas, formando um ângulo de 30º com o solo (ver seção lateral ao lado). Determine a altura *h* do nível da água em relação ao solo.



PRISMAS



Para obter o volume de um prisma, começamos com o prisma triangular. O triângulo ΔABC de sua base pode ser considerado como a metade de um paralelogramo ABDC, e o prisma triangular será uma das duas partes congruentes obtidas na secção do paralelepípedo cuja base é esse paralelogramo e com a mesma altura do prisma.



O volume do prisma triangular será a metade do volume do paralelepípedo; como altura é a mesma, teremos:

O volume de um prisma triangular é o produto da área da sua base pela altura.

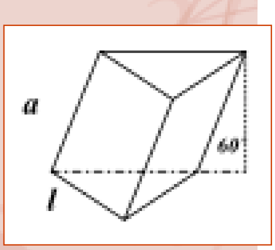
Já vimos que, tomando as diagonais com origem no mesmo vértice de polígono qualquer, podemos dividi-lo em triângulos, e um prisma qualquer pode ser considerado como a reunião de prismas triangulares. Isso nos permite concluir que:

O volume de um prisma é o produto da área da base pela altura.

Agora faça você:

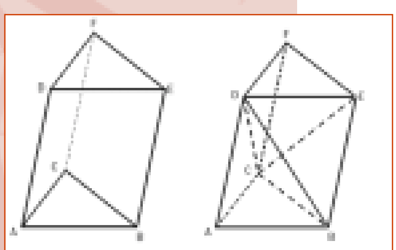
1. Calcular o volume de um prisma cuja base é um triângulo eqüilátero de 6 dm de perímetro, sendo a altura do prisma o dobro da altura da base.

2. Calcular o volume do prisma regular de seis faces, sabendo que sua diagonal mede 13 m e que as diagonais da base medem 12 m.



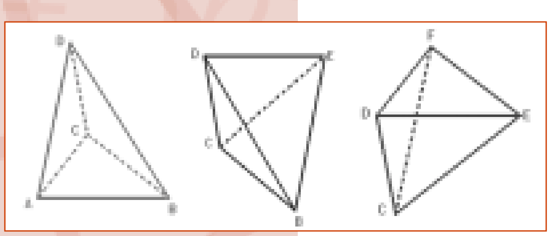
3. Determinar o volume de um prisma triangular oblíquo sendo a base um triângulo eqüilátero de lado l = 4 dm e a = 4 dm a aresta lateral que forma um ângulo de 60° com a base do prisma.

4. Calcular o volume de um prisma hexagonal regular de área total igual a 12 dm², sendo 1 dm a altura do prisma.



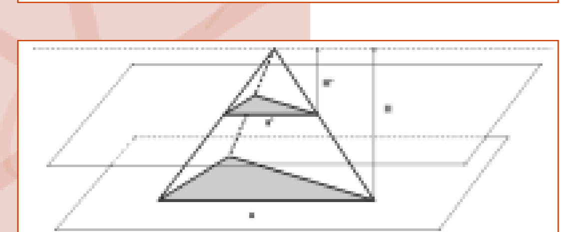
PIRÂMIDES

Para obter o volume de uma pirâmide, vamos explorar uma relação interessante que existe entre prismas e pirâmides triangulares. Um bom exercício é tentar fazer essa divisão utilizando uma barra de sabão ou um prisma feito com massa de modelar.



O prisma triangular pode ser dividido em três pirâmides que, duas a duas, têm bases congruentes e a mesma altura. Uma divisão está esboçada na figura acima, e as três pirâmides estão destacadas ao lado.

Vamos estudar especialmente a secção de uma pirâmide por um plano paralelo à sua base, como na figura abaixo:



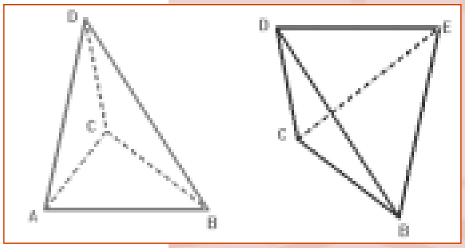
O Teorema de Tales da Geometria Plana pode também ser provado no contexto da Geometria Espacial, e temos assim condições de afirmar que planos paralelos determinam segmentos proporcionais ao interceptarem retas no espaço.

No caso da pirâmide seccionada por um plano paralelo à sua base, as proporcionalidades que vêm do Teorema de Tales nos permitem concluir que a razão ***a' / a*** entre os comprimentos ***a'*** e ***a*** dos lados da base e do triângulo do corte é a mesma que a razão ***k* = *H'* / *H*** entre a distância do plano de corte ao vértice e a altura da pirâmide. Temos, portanto, a'= k a, o que nos leva a concluir (reveja a relação entre as áreas de figuras semelhantes) que:

$$\boxed{\mathbf{A' = k^2 A}}$$

onde *A'* é a área da secção, *A* é a área da base e *k* é a razão entre as alturas *H'*e *H*.

Observando agoras duas da pirâmides obtidas a partir do prisma triangular, tomando por bases os triângulos congruentes ΔABD e ΔEDB (verifique a congruência) e como vértice de ambas o ponto C, podemos concluir, pela proporcionalidade das áreas das secções e pelo Princípio de Cavalieri, que as duas pirâmides têm o mesmo volume. Para isto, tomamos secções paralelas ao plano das bases congruentes. Da mesma forma, podemos verificar que o volume da terceira pirâmide é igual ao das outras duas:

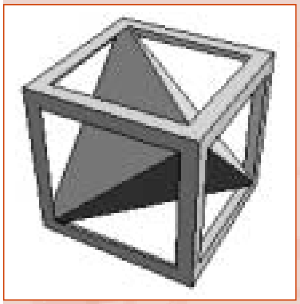


Assim, o *volume de uma pirâmide triangular* é um terço do volume do prisma triangular e, portanto, *um terço do produto da área da sua base pela altura relativa a ela*. Como no caso dos prismas, uma pirâmide qualquer pode ser descrita como a adequada reunião de pirâmides triangulares, e o mesmo cálculo de volumes vale para uma pirâmide de base qualquer. Em resumo:

O volume de uma pirâmide é dado por um terço do produto da área de sua base pelo comprimento da altura relativa à ela.

Agora faça você:

1. Calcule o volume do tetraedro regular de aresta *a*, usando a figura ao lado:



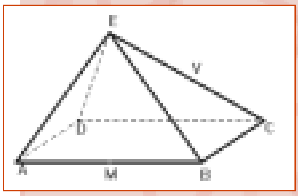
2. (PUC-SP) Um octaedro regular tem volume $\frac{4}{3}$ m². Uma diagonal desse sólido, em metros, mede:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $2\sqrt{2}$

3. (CESCEM) Um quadrado de lado *x* é base de um prisma triangular e de uma pirâmide regular de mesma altura. A razão entre a área lateral do prisma e o volume da pirâmide é:

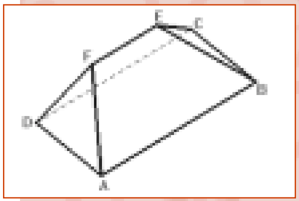
a) $4x/3$ b) $3x/4$ c) $4/(3x)$ d) $3/(4x)$ e) $12/x$

4. (FUVEST) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



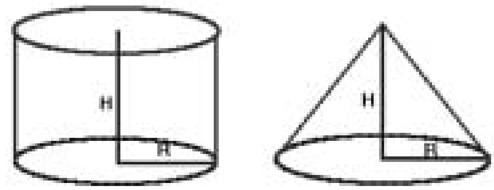
a) 1 b) 1,5 c) 2 d) 2,5 e) 3

5. (FUVEST) No sólido *S* representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2λ e AD = λ; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos eqüiláteros e o segmento $\overline{EF}$ tem comprimento λ. Determinar, em função de λ, o volume de *S*.



Cilindros e cones

Passando para os corpos redondos (cilindros e cones), para calcular o seu volume utilizamos o antigo método de exaustão, baseado nas idéias de Eudoxo, um geômetra grego que viveu por volta do século IV a.C. Baseado no príncipio de que os polígonos regulares inscritos fornecem uma aproximação para a circunferência e suas áreas para a área do círculo, consideramos os prismas e



Volume do cilindro:
$V = \pi R^2 H$

Volume do cone:
$V = \pi R^2 H / 3$

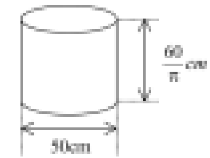
pirâmides regulares para aproximar os volumes do cilindro e do cone, respectivamente. Temos, como conseqüência:

Volume do cilindro: $V = \pi R^2 H$

Volume do cone: $V = \pi R^2 H / 3$

Agora faça você:

1. (UFBA) O tonel representado ao ladoestá ocupado em 80% da sua capacidade.



A quantidade de água nele contida é de:

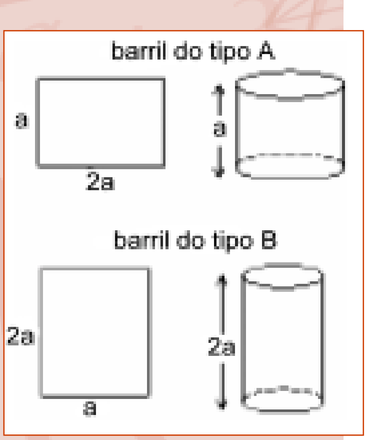
a) 20 *l*   b) 30 *l*   c) 40 *l*   d) 50 *l*   e) 60 *l*

2. (UFPA) O reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica tem 4 mm de diâmetro e 10 cm de comprimento. Se você gasta 5 p mm³ de tinta por dia, a tinta de sua esferográfica durará:

a) 20 dias   b) 40 dias   c) 50 dias   d) 80 dias   e) 100 dias

3. Em um cilindro circular reto, a medida da altura é o triplo da medida do raio de base. Sabendo que a área de uma seção meridiana é 48 cm², calcule o volume desse cilindro.

4. Uma lata cilíndrica contém um líquido que deve ser distribuído em recipientes, também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura que o líquido ocupa na lata e cujo diâmetro da base é um terço do diâmetro da base da lata. Quantos recipientes serão necessários?

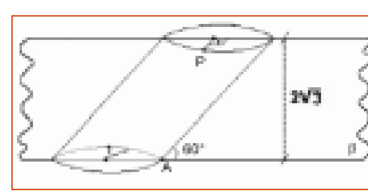


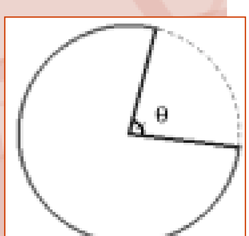
5. (FUVEST) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2 a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado ao lado.

Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

a) $V_A = 2 V_B$ b) $V_B = 2 V_A$ c) $V_A = V_B$ d) $V_A = 4 V_B$ e) $V_B = 4 V_A$

6. Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60º (ver figura) O plano b é perpendicular às bases do cilindro, passando pelos seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.





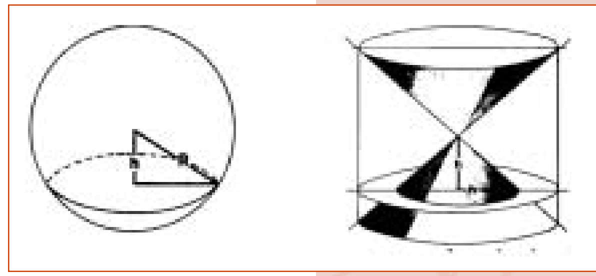
7. (FUVEST) Um setor circular com ângulo central θ ($0 < \theta < 2\pi$) é recortado de um círculo de papel de raio R (ver figura ao lado). Utilizando o restante do papel, construímos a superfície lateral de um cone circular reto. Determine, em função de R e θ*:*

a) o raio da base do cone;   b) o volume do cone.

8, (CESGRANRIO) Para construir uma piscina cilíndrica, com fundo circular, cava-se, num terreno plano, um buraco com raio R e profundidade R/4. A terra fofa, retirada do buraco, ocupa um volume 20% maior que o do buraco cavado e é amontoada na forma de um cone circular reto. Supondo que o raio r da base do cone é igual à sua altura, então a melhor aproximação da razão r / R é:

a) 1/2 b) 1 c) 1,2 d) $\pi/2$ e) $\sqrt{3}$

O VOLUME DA ESFERA



O grande matemático Arquimedes, que viveu entre 287 e 212 a.C., calculou o volume da esfera comparando-a com um cilindro e um par de cones (também chamado cone de duas folhas) de uma forma bastante engenhosa, pois originalmente ele estabeleceu uma relação de equilíbrio entre esses sólidos.

A comparação das áreas de uma secção de uma esfera de raio R, um cilindro de raio R e altura 2R e dois cones de raio R e altura R, por um plano perpendicular à geratriz do cilindro e ao diâmetro da esfera, conforme ilustra a figura abaixo, nos dá:

Área da secção da esfera: $\mathbf{A_e = \pi (R^2 - h^2)}$

Área da secção do cilindro: $\mathbf{A_{cil} = \pi R^2}$

Área da secção do cone: $\mathbf{A_{cone} = \pi h^2}$

Para cada secção, temos:

$$\mathbf{A_{cil} = A_e + A_{cone}}$$

Portanto, os volumes verificarão:

$$\mathbf{V_{cil} = V_e + V_{cone}}$$

Sabemos que

Volume do cilindro: $\mathbf{V = 2\pi R^3}$, pois $\mathbf{H = 2R}$

Volume do cone: $\mathbf{V = \pi R^3 / 3}$, pois $\mathbf{H = R}$

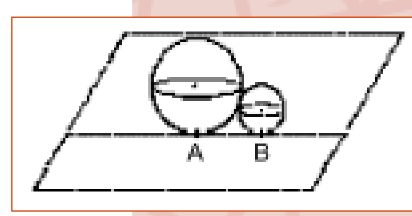
Logo, o volume da esfera será:

Volume da esfera = Volume do cilindro – 2 Volume do cone = $\mathbf{2\pi R^3 - 2\pi R^3/3}$

$$\boxed{\textbf{Volume da esfera} = \mathbf{4\pi R^3/3}}$$

Agora faça você:

1. (FUVEST) No jogo de Bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próxima possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura abaixo. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



a) 8 b) $6\sqrt{2}$ c) $8\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

2. (CESCEM) A área da intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é 144π. A distância do plano ao centro da bola é:

a) 1 b) 5 c) 8 d) 12 e) 25

Bibliografia

O'Daffner, C. *Geometry, an investigative approach*. Addison Wesley, 1976.

Dolce, O.; Pompeo, J. N. *Geometría Espacial*. Col. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10.

Dolce, O., Pompeo, J.N.,*Geometria Plana*, Col. Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 9, Ed. Atual, 1998.

Downs, F. L. Jr., Moise, E. E. , *Geometria Moderna*, Vol.1, Ed. Edgard Blücher, 1971.

Kaleff, Ana M. M. R. *Vendo e Entendendo Poliedros*. EdUFF, 1998.

Kutepov, A.; Rubanov, A. *Problems in Geometry*. Ed. Mir, 1975.

Lima, E. L. et al. *A Matemática no Ensino Médio*. Col. do Professor de matemática, SBM, 2000.

Lima, E. L., *Áreas e Volumes*, Col. Fundamentos de Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática, 1979.

Nichols, E. D., Palmer, W. F., Schacht, J. F., *Geometria Moderna*, Compañia Editorial Continental, S.A., 1971.

Lopes, J. M.; Lotufo, V. *Geodésicas e Cia.* Ed. Projeto.

Shuvalova, E. Z. *Geometry.* Ed. Mir, 1980.

Smart, J. R. *Making connections by using molecular models in Geometry.* Math. Teacher, January, 1994.

Schattschneider, D.; Walker, W. *Caleidociclos de M. Escher*. B. Taschen, 1991.

Sortais, R; Sortais, Y. *Géométrie de l'espace et du plan*. Hermann, 1995.

Stoessel, Wahl. *The orthotetrakaikahedron – a cell model for Biology classes*. Math. Teacher, March 1977, 244-247.

Endereços na Internet:

http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbpolyhedra.htm

http://www.teleport.com/~tpgettys/poly

http://www.li.net/~george/virtual-polyhedra

http://www.fkf.mpg.de/anderssen/fullerene/intro.html

Sobre as autoras

Cláudia Cueva Candido

Docente do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da USP, onde fez bacharelado em Matemática, além de mestrado e doutorado na área de Geometria Diferencial. Atualmente, é membro da diretoria do Centro de Aperfeiçoamento de do Ensino da Matemática (CAEM) do IMEUSP.

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Professora aposentada do Departamento de Matemática do IME-USP, onde fez graduação, mestrado e doutorado. É docente dos cursos de Licenciatura em Matemática da UMC e do UNIFIEO e conferencista convidada do curso de Especialização em História da Matemática do Centro de Extensão Universitária.