Matemática

Geometria Plana

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro

Elaboradoras
Cláudia Cueva Candido
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

3 módulo

Nome do Aluno ______________________________

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Governador: *Geraldo Alckmin*

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

Secretário: *Gabriel Benedito Issac Chalita*

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP

Coordenadora: *Sonia Maria Silva*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: *Adolpho José Melfi*

Pró-Reitora de Graduação

Sonia Teresinha de Sousa Penin

Pró-Reitor de Cultura e Extensão Universitária

Adilson Avansi Abreu

FUNDAÇÃO DE APOIO À FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FAFE

Presidente do Conselho Curador: *Selma Garrido Pimenta*

Diretoria Administrativa: *Anna Maria Pessoa de Carvalho*

Diretoria Financeira: *Sílvia Luzia Frateschi Trivelato*

PROGRAMA PRÓ-UNIVERSITÁRIO

Coordenadora Geral: *Eleny Mitrulis*

Vice-coordenadora Geral: *Sonia Maria Vanzella Castellar*

Coordenadora Pedagógica: *Helena Coharik Chamlian*

Coordenadores de Área

Biologia:

Paulo Takeo Sano – Lyria Mori

Física:

Maurício Pietrocola – Nobuko Ueta

Geografia:

Sonia Maria Vanzella Castellar – Elvio Rodrigues Martins

História:

Kátia Maria Abud – Raquel Glezer

Língua Inglesa:

Anna Maria Carmagnani – Walkyria Monte Mór

Língua Portuguesa:

Maria Lúcia Victório de Oliveira Andrade – Neide Luzia de Rezende – Valdir Heitor Barzotto

Matemática:

Antônio Carlos Brolezzi – Elvia Mureb Sallum – Martha S. Monteiro

Química:

Maria Eunice Ribeiro Marcondes – Marcelo Giordan

Produção Editorial

Dreampix Comunicação

Revisão, diagramação, capa e projeto gráfico: *André Jun Nishizawa*, *Eduardo Higa Sokei*, *José Muniz Jr.*
Mariana Pimenta Coan, *Mario Guimarães Mucida* e *Wagner Shimabukuro*

Cartas ao
Aluno

Carta da
Pró-Reitoria de Graduação

Caro aluno,

Com muita alegria, a Universidade de São Paulo, por meio de seus estudantes e de seus professores, participa dessa parceria com a Secretaria de Estado da Educação, oferecendo a você o que temos de melhor: conhecimento.

Conhecimento é a chave para o desenvolvimento das pessoas e das nações e freqüentar o ensino superior é a maneira mais efetiva de ampliar conhecimentos de forma sistemática e de se preparar para uma profissão.

Ingressar numa universidade de reconhecida qualidade e gratuita é o desejo de tantos jovens como você. Por isso, a USP, assim como outras universidades públicas, possui um vestibular tão concorrido. Para enfrentar tal concorrência, muitos alunos do ensino médio, inclusive os que estudam em escolas particulares de reconhecida qualidade, fazem cursinhos preparatórios, em geral de alto custo e inacessíveis à maioria dos alunos da escola pública.

O presente programa oferece a você a possibilidade de se preparar para enfrentar com melhores condições um vestibular, retomando aspectos fundamentais da programação do ensino médio. Espera-se, também, que essa revisão, orientada por objetivos educacionais, o auxilie a perceber com clareza o desenvolvimento pessoal que adquiriu ao longo da educação básica. Tomar posse da própria formação certamente lhe dará a segurança necessária para enfrentar qualquer situação de vida e de trabalho.

Enfrente com garra esse programa. Os próximos meses, até os exames em novembro, exigirão de sua parte muita disciplina e estudo diário. Os monitores e os professores da USP, em parceria com os professores de sua escola, estão se dedicando muito para ajudá-lo nessa travessia.

Em nome da comunidade USP, desejo-lhe, meu caro aluno, disposição e vigor para o presente desafio.

Sonia Teresinha de Sousa Penin.

Pró-Reitora de Graduação.

Carta da
Secretaria de Estado da Educação

Caro aluno,

Com a efetiva expansão e a crescente melhoria do ensino médio estadual, os desafios vivenciados por todos os jovens matriculados nas escolas da rede estadual de ensino, no momento de ingressar nas universidades públicas, vêm se inserindo, ao longo dos anos, num contexto aparentemente contraditório.

Se de um lado nota-se um gradual aumento no percentual dos jovens aprovados nos exames vestibulares da Fuvest — o que, indubitavelmente, comprova a qualidade dos estudos públicos oferecidos —, de outro mostra quão desiguais têm sido as condições apresentadas pelos alunos ao concluírem a última etapa da educação básica.

Diante dessa realidade, e com o objetivo de assegurar a esses alunos o patamar de formação básica necessário ao restabelecimento da igualdade de direitos demandados pela continuidade de estudos em nível superior, a Secretaria de Estado da Educação assumiu, em 2004, o compromisso de abrir, no programa denominado Pró-Universitário, 5.000 vagas para alunos matriculados na terceira série do curso regular do ensino médio. É uma proposta de trabalho que busca ampliar e diversificar as oportunidades de aprendizagem de novos conhecimentos e conteúdos de modo a instrumentalizar o aluno para uma efetiva inserção no mundo acadêmico. Tal proposta pedagógica buscará contemplar as diferentes disciplinas do currículo do ensino médio mediante material didático especialmente construído para esse fim.

O Programa não só quer encorajar você, aluno da escola pública, a participar do exame seletivo de ingresso no ensino público superior, como espera se constituir em um efetivo canal interativo entre a escola de ensino médio e a universidade. Num processo de contribuições mútuas, rico e diversificado em subsídios, essa parceria poderá, no caso da estadual paulista, contribuir para o aperfeiçoamento de seu currículo, organização e formação de docentes.

Prof. Sonia Maria Silva

Coordenadora da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Apresentação da área

> [...] a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós. [...] Assim é necessário colocar a ênfase:
>
> — em procurar soluções e não apenas em memorizar procedimentos;
> — em explorar modelos e não apenas em memorizar fórmulas;
> — em formular conjecturas e não apenas em fazer exercícios.
>
> [...] com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.
>
> Shoenfeld (1992)[1]

Este curso de Matemática com duração de 4 meses está sendo oferecido a alunos do último ano do ensino médio da rede pública como um incentivo para continuarem seus estudos em direção ao ensino superior. Embora não cubra todo o programa do ensino médio, pretende-se estimular o interesse dos alunos pelos diversos temas de Matemática por meio de abordagens variadas.

Serão estudados tópicos sobre Números, Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Sistemas Lineares e Funções, privilegiando o entendimento das possíveis facetas de um mesmo assunto, a análise de resultados obtidos e a interligação entre os diversos conteúdos.

Escolhas foram feitas de modo a priorizar sua formação, a discussão de idéias e a percepção de que a Matemática é uma disciplina viva que pode ser construída, e não um amontoado de fórmulas prontas para serem decoradas e usadas. Lembrando que realmente aprendemos quando trabalhamos o conhecimento, analisando-o de várias maneiras e usando-o com critério, consideraremos, sempre que possível, aplicações em problemas reais e interdisciplinares.

Acreditando que o intercâmbio entre vocês, alunos do ensino médio, e os alunos da USP, que serão os seus professores, venha a aumentar a sua predisposição para o ensino superior, desejamos a todos **bons estudos**!

Coordenação da área de Matemática

[1]SCHOENFELD A. H. "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics". In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematicas teaching and learning*. p. 334-370. Nova Iorque: MacMillan, 1992.

Apresentação do módulo

A Geometria foi desenvolvida a partir da necessidade de medir terras, construir casas, templos e monumentos, navegar, calcular distâncias. Através dos tempos, os seus registros estão presentes nos legados de todas as civilizações: babilônios, egípcios, gregos, chineses, romanos, hindus, árabes utilizaram as formas geométricas no seu dia-a-dia.

Os conceitos, propriedades e resultados que estudaremos são muito antigos, começaram a adquirir a forma que os conhecemos hoje com as investigações de Tales, que viveu por volta de 600 anos antes de Cristo, ganharam força nas escolas de Pitágoras, Aristóteles e Platão, e foram organizados, pela primeira vez, por Euclides, um matemático da escola de Alexandria que viveu por volta de 300 anos antes de Cristo. Por essa razão, a Geometria que estudaremos, muito freqüentemente denominada de "Geometria Euclidiana", foi aperfeiçoada pelos sucessores de Euclides e, até o ano 500 da era cristã, já tinha sua forma atual.

Nesse jogo fascinante, desafiador e já muito antigo, as peças são os pontos, as retas, os planos e os muitos objetos geométricos que podemos definir a partir deles. A régua e o compasso sempre foram os instrumentos utilizados na construção das figuras que os representam. Como tais estarão presentes em nossas atividades, sendo também possível substitui-los, nos dias de hoje, por recursos computacionais desenvolvidos para esse fim. As regras do jogo geométrico são dadas pelos chamados Postulados da Geometria e, a partir dessas regras, com o uso da lógica dedutiva, são provadas as proposições e os teoremas que vão estabelecendo as propriedades das figuras geométricas que utilizamos freqüentemente.

Os padrões da natureza e suas simetrias e muitos problemas práticos do nosso cotidiano podem ser traduzidos e transformados num diagrama geométrico. A análise e interpretação desse modelo trazem um melhor entendimento, novas informações ou respostas para o problema original, e constituem a rotina de trabalho quando estudamos Geometria.

O estudo dos principais tópicos de Geometria se fará em três etapas, que compreenderão a Geometria Plana, a Geometria Espacial e a Geometria Analítica. A Geometria Plana será desenvolvida com base em dois conceitos fundamentais, que vemos exemplificados na ilustração acima: temos uma figura geométrica que aparece repetidas vezes, em diferentes posições, ampliada ou reduzida. A congruência é ilustrada pelos pares que diferem somente pela posição, e que podem ser superpostos; já a semelhança é exemplificada pelos pares que se relacionam por uma ampliação ou uma redução. Sobre esses dois pilares vamos construir o conhecimento geométrico necessário para o estudo da Geometria Espacial e da Geometria Analítica.

Notações e Definições

A linguagem matemática da Geometria Euclidiana Plana ou Espacial é a linguagem da chamada Teoria dos Conjuntos. Do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, vamos considerar o **plano** (ou o **espaço**) como nosso Conjunto Universo, cujos elementos chamaremos **pontos**. As **retas** serão subconjuntos especiais desse conjunto universo.

Os **pontos e retas de um plano** também são chamados **"elementos primitivos"** da nossa Geometria Plana.

Para denotar os **pontos** usaremos as **letras maiúsculas**: **A**, **B**, **C**...; para as **retas** utilizaremos as letras minúsculas: **a**, **b**, **c**... Para os planos usaremos as letras do alfabeto grego: α (alfa), β (beta), γ (gama), δ (delta)...

Para descrever as relações entre pontos retas e planos, os símbolos utilizados serão:

$\in$ - **pertence**

$\subset$ - **está contido**

$\supset$ - **contém**

$\cup$ - **reunião**

$\cap$ - **intersecção**

Diremos que:

- um **ponto pertence à reta** (e escreveremos, em linguagem simbólica: $\mathbf{P} \in \mathbf{r}$) ou **ao plano** (em linguagem simbólica: $\mathbf{P} \in \pi$); no primeiro caso, diremos também **a reta passa pelo ponto,** e, no segundo, que o **plano passa pelo ponto.**
- a **reta está contida no plano** (em linguagem simbólica: $\mathbf{r} \subset \pi$) ou o **plano contém a reta** (em linguagem simbólica: $\pi \supset \mathbf{r}$);
- pontos de uma **mesma reta** são chamados pontos **colineares.**

Denotaremos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e admitiremos conhecidas suas propriedades.

As relações entre pontos e retas de um plano que admitiremos são:

- Por dois pontos distintos passa uma única reta.
- Toda reta contém pelo menos dois pontos distintos.
- Existem, pelo menos, três pontos distintos não colineares.

Dados dois pontos distintos P e Q denotaremos por $\overleftrightarrow{\mathbf{PQ}}$ a **reta** determinada por P e Q.

Os resultados que utilizamos no estudo da geometria dos triângulos são chamados de **proposições** ou **teoremas**, de acordo com sua importância. Todos eles podem ser demonstrados, tendo uma estruturação lógica adequada. Para provar uma proposição ou um teorema precisamos inicialmente saber distinguir:

- as chamadas **hipóteses** da proposição ou teorema, que são os fatos que estamos admitindo como ponto de partida;
- a **tese** da proposição ou do teorema, que é a conclusão a qual queremos chegar;
- a **demonstração,** que é o desenvolvimento lógico da argumentação que nos permite, partindo das hipóteses, chegar à tese como conclusão do raciocínio.

Como exemplos, temos:

Proposição 1. Duas retas distintas têm, no máximo, um ponto em comum.

Neste caso, teremos como hipótese o fato de serem dadas duas retas distintas, e como tese o fato de que elas devem ter, no máximo, um ponto em comum.

Proposição 2. Existem, pelo menos, duas retas distintas passando por um mesmo ponto.

Neste segundo caso, qual é a hipótese e qual é a tese?

Precisaremos também de definições que estabeleçam de forma precisa quais propriedades devem ter os objetos com os quais vamos trabalhar.

Definição: duas retas cuja intersecção é um único ponto são chamadas **concorrentes**; chamaremos **paralelas** duas retas distintas de um plano cuja intersecção é vazia.

Vamos também admitir que sabemos medir distâncias denotando **PQ** ou **d (P, Q)** como a distância entre os pontos P e Q. Com a noção de distância, podemos definir os objetos geométricos que nos interessam especialmente para construir as figuras geométricas do nosso estudo.

No plano, o primeiro deles é a **circunferência C** com **centro num ponto O** e **raio R**, formada pelo conjunto de pontos desse plano que estão à distância **R** do ponto **O**.

Definição: dados três pontos colineares A, B e C, diremos que **B está entre A e C** e denotamos **A – B – C** (ou C – B – A) se AB + BC = AC .

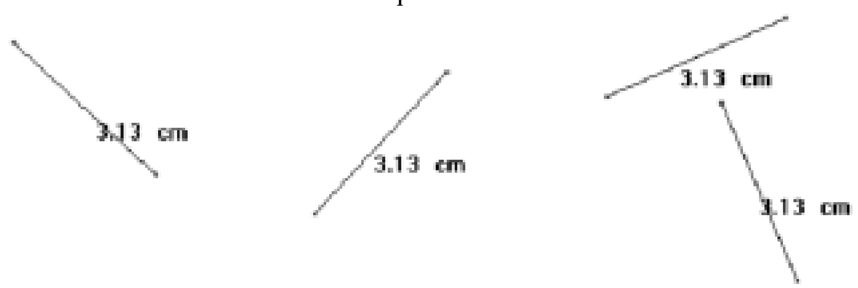
Definição: chamamos segmento com extremos A e B e denotamos $\overline{AB}$ o conjunto:

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C : A - C - B\}$$

Definição: o **comprimento** de um segmento $\overline{AB}$ é o valor da distância **AB** entre os pontos extremos A e B**.**

Diremos que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **congruentes (**$\overline{AB} \cong \overline{CD}$**)** se eles têm o **mesmo comprimento**.

Observamos que, se dois segmentos são congruentes, podemos fazê-los coincidir se os movimentamos adequadamente.



O ponto M que **divide o segmento em dois segmentos congruentes,** ou seja,tal que A – M – B e AM = MB é chamado o **ponto médio do segmento.**

Definição: chamamos **semi-reta fechada com origem A e passando pelo ponto B** e denotamos $\overrightarrow{AB}$ o conjunto:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C : A - B - C\}$$

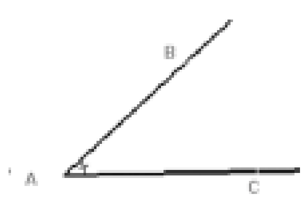
A **semi-reta aberta** com a mesma origem A exclui o ponto A.

Faça algumas figuras (use a régua e o compasso) para se convencer da validade dos seguintes fatos:

Proposição. $\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$

Proposição (construção de segmentos). Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semi-reta $\overrightarrow{CD}$, existe exatamente um ponto E na semi-reta tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.

Definição: um **ângulo de vértice** A é a reunião de duas semi-retas fechadas com origem A não contidas em uma mesma reta.



Se $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são as semi-retas, denotamos o ângulo de vértice A por $\hat{A}$ ou $\angle$**BAC**.

Para medir ângulos, assumiremos a existência de uma função medida de ângulos, que corresponde a medir ângulos com o uso do transferidor. Usaremos a notação **m (**$\hat{A}$**)** ou **m (**$\angle$**BAC)** para a **medida do ângulo de vértice A**.

Os valores dessa função ficam entre zero e um valor **L** que depende da escala que adotamos. A medida fica entre 0^o e 180^o (se medimos os ângulos em **graus**) ou 200 gr (medida do ângulo em **grados**) ou ainda **L** = π (medida do ângulo em radianos, que será usada, futuramente, na Trigonometria). Escolheremos o valor L = 180º, pois a escala em graus é a mais usual na Geometria.

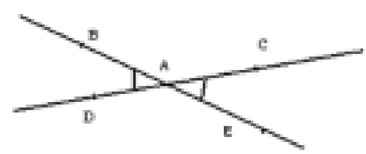
Como no caso dos segmentos, diremos que dois ângulos são **congruentes** se têm a **mesma medida e** denotamos **$\angle BAC \cong \angle DEF$**.

Quando temos ângulos congruentes, também podemos fazê-los coincidir através de um movimento.

Dois ângulos são chamados **complementares** se a soma de suas medidas é **90º,** e serão chamados **suplementares** se a soma de suas medidas é **180º**.

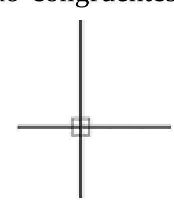
Chamamos **ângulo reto** o ângulo cuja medida é **90º**. Ângulos **agudos** são aqueles cuja medida é **menor que 90º** e ângulos **obtusos** são aqueles cuja medida é **maior que 90º**.

Definição: ângulos **opostos pelo vértice** são ângulos cujos lados são semi-retas opostas.



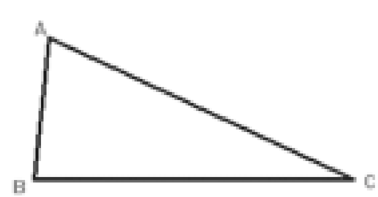
É fácil verificar que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Definição: duas retas são **perpendiculares** se são concorrentes e se interceptam formando ângulos retos.



Definição: dados três pontos distintos e não colineares A, B e C, o **triângulo** com vértices A, B e C é a reunião dos segmentos cujos extremos são esses três pontos.

Denotaremos:



$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

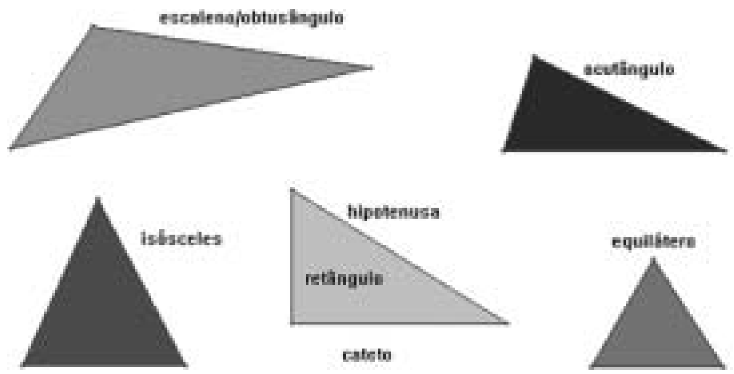
Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são chamados os **lados** do triângulo.

Denotaremos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ os **ângulos** correspondentes aos vértices A, B e C, respectivamente. Temos, portanto, associados a um triângulo, três segmentos e três ângulos.

Os triângulos têm denominações especiais se consideramos os comprimentos de seus lados. Se todos os lados de um triângulo são congruentes, o triângulo é chamado **eqüilátero**; se dois dos lados são congruentes, o triângulo é chamado **isósceles**, e se os três lados têm comprimentos distintos, o triângulo é chamado **escaleno**.

Os triângulos também têm denominações especiais se consideramos as medidas dos seus ângulos**.** Se todos os ângulos de um triângulo são congruentes, o triângulo é **chamado eqüiângulo**; se todos os seus ângulos são agudos, temos um **triângulo acutângulo**, se um de seus ângulos é obtuso, o triângulo é **obtusângulo** e o triângulo **retângulo** tem um ângulo reto.

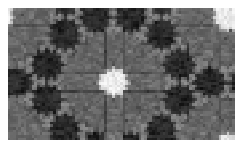
No **triângulo retângulo**, os lados têm denominações especiais: a **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto, e os **catetos** são os lados adjacentes a ele.

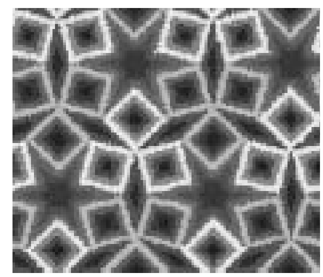


Unidade 1

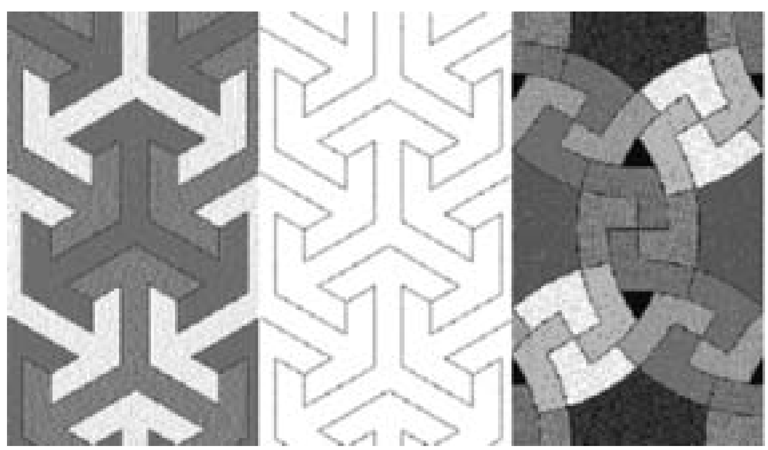
Congruência de Triângulos

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaboradora
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão



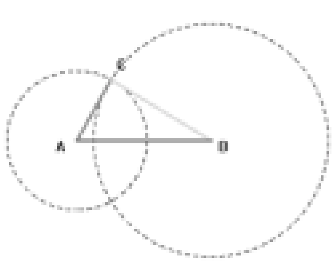


O estudo das congruências de triângulos é o primeiro passo de um estudo mais geral que nos permite desenvolver o olhar e a técnica para identificar padrões na natureza e construir figuras como as que vemos nas ilustrações.



Fonte: http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/#tess

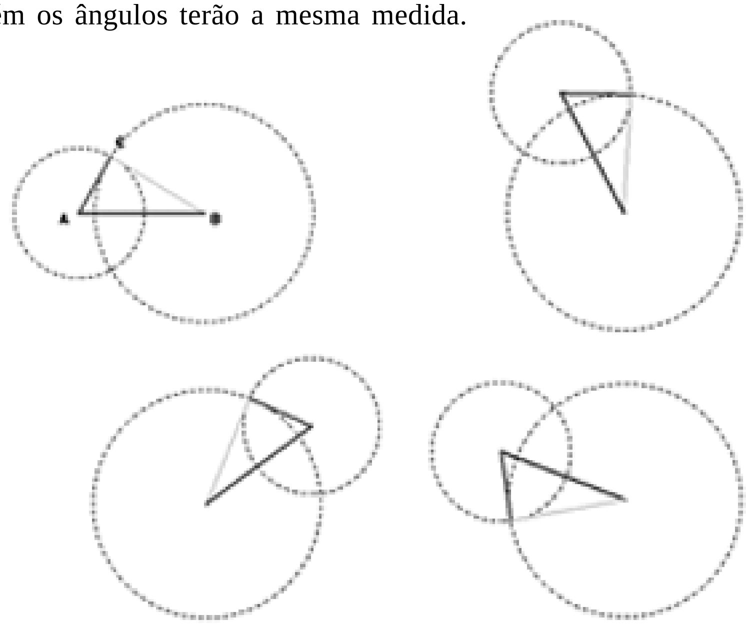
Para construir figuras que nos auxiliem a compreender os fatos da Geometria, podemos utilizar a régua (com escala ou não), o compasso ou o transferidor. Com o compasso podemos desenhar circunferências com raios iguais à abertura do compasso e com o centro no ponto em que o fixamos. Podemos escolher duas aberturas quaisquer e traçar circunferências com centros distintos e que se encontram, conforme a figura abaixo.



Os centros (A e B) das circunferências e um dos pontos de intersecção (C) determinam vértices de um triângulo ΔABC.

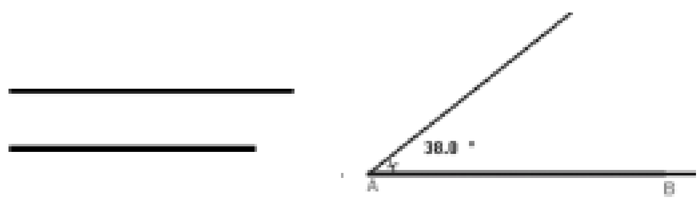
As medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ desse triângulo são as medidas dos raios das circunferências e a distância AB entre os seus centros é a medida do terceiro lado, com extremos A e B .

Se repetirmos a construção com os mesmos dados (isto é, circunferências com os mesmos raios e mantendo a mesma distância entre os seus centros) os vários triângulos obtidos podem ser comparados. Verificaremos que não só os lados terão os mesmos comprimentos, mas também os ângulos terão a mesma medida.

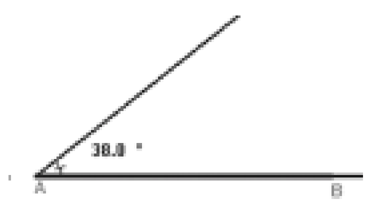


Essa experiência nos mostra que, se escolhermos adequadamente três comprimentos AB, AC e BC, de forma que as circunferências se encontrem, podemos construir um triângulo ΔABC. A construção terá uma única solução, isto é, todos os triângulos construídos podem ser superpostos se os movimentarmos adequadamente.

Vejamos agora o que acontece se formos construir um triângulo dados **dois lados** e **um ângulo**. Quantos e como serão os triângulos assim construídos?

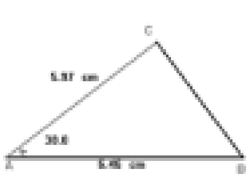


Observamos inicialmente que um dos lados dados sempre deverá estar contido em um dos lados do ângulo.

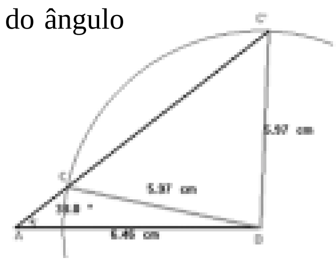


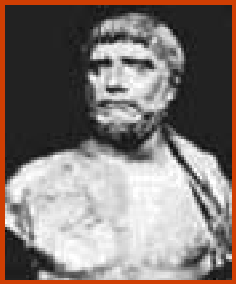
Temos duas possibilidades para o segundo lado dado; podemos escolhê-lo como:

a) $\overline{AC}$: contido no outro lado do ângulo



b) $\overline{BC}$: não contido no outro lado do ângulo





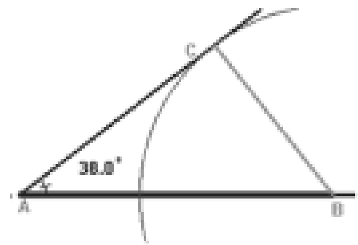
Tales de Mileto

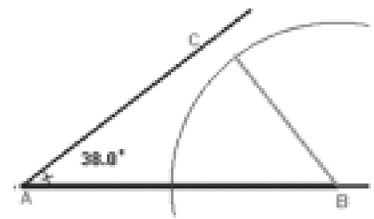
(Ásia Menor) viveu entre 624 e 547 a.C. e é considerado o primeiro filósofo e matemático da escola grega. Pouco se sabe sobre sua vida, recuperada a partir de referências nos trabalhos de seus sucessores, mas atribui-se a ele a formulação dos primeiros resultados da Geometria.

No primeiro caso temos a solução para o problema da construção do triângulo, e ela é única, a menos de movimentos no plano, e o lado BC fica determinado.

No segundo caso, poderíamos não só ter duas soluções distintas C e C', como na figura acima, mas também poderíamos ter:

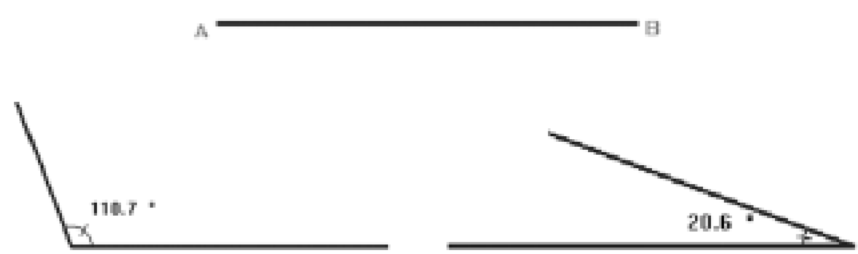
uma única solução ou não é possível construir um triângulo,



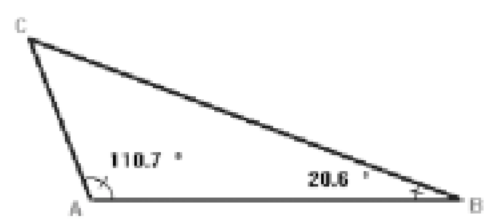


dependendo da medida do segundo lado.

Se os elementos dados forem **um lado e dois ângulos**, vejamos as construções possíveis.

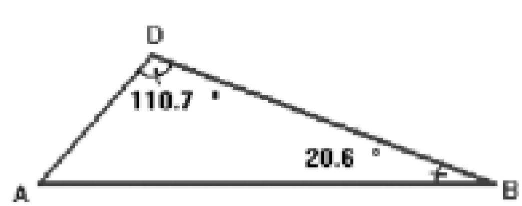


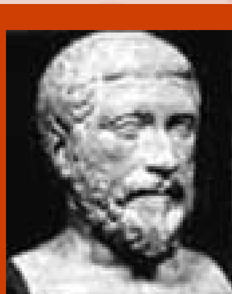
Primeiramente, vamos construir um triângulo de forma que os ângulos tenham o lado dado como lado comum:



Podemos verificar, construindo repetidamente, que, novamente, a menos de movimentos no plano, teremos triângulos que podem ser superpostos.

Uma segunda possibilidade de construção será tomar um dos ângulos adjacentes ao lado dado e o outro, o ângulo oposto a esse lado. Essa construção é mais difícil de ser executada (depende da construção do chamado arco capaz de um segmento dado, que só veremos mais tarde), mas conduz a soluções que também são únicas a menos de movimentos:

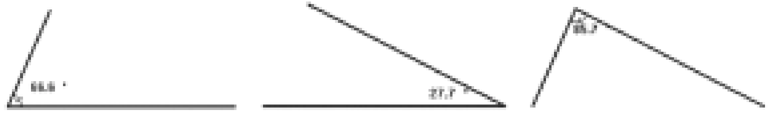




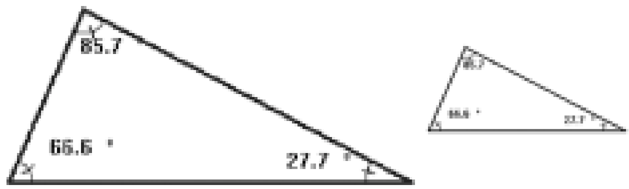
Pitágoras de Samos

Viveu entre 569 e 475 a.C. e adquiriu seus conhecimentos nas viagens por vários paises pelos quais passou, pressionado pelas mudanças políticas provocadas pelas guerras e invasões. Estabeleceu as bases da chamada Escola Pitagórica, uma sociedade secreta que muito contribuiu para o desenvolvimento da Matemática de sua época.

Finalmente, se forem dados três ângulos, é fácil obter muitos triângulos distintos, ou seja, nessa situação não temos unicidade de solução:



Dados dois triângulos ΔABC e ΔDEF, para compará-los de forma mais precisa, vamos descrever uma correspondência entre os respectivos vértices.



Diremos que os triângulos **ΔABC** e **ΔDEF** são **correspondentes** e denotaremos **$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$** para estabelecermos que os pontos A, B e C correspondem aos pontos D, E e F, respectivamente.

Uma correspondência entre dois triângulos nos dá naturalmente uma correspondência entre seus ângulos e seus lados.

Na correspondência **$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$,** temos:

$$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{DE}, \qquad \overline{BC} \leftrightarrow \overline{EF} \quad \text{e} \quad \overline{AC} \leftrightarrow \overline{DF}$$

$$\angle ABC \leftrightarrow \angle DEF, \qquad \angle BCA \leftrightarrow \angle EFD, \qquad \angle BAC \leftrightarrow \angle EDF$$

Como já vimos anteriormente, a congruência, em Geometria, está associada à igualdade de medidas. Segmentos ou ângulos congruentes são aqueles que têm a mesma medida. Intuitivamente, quando dois triângulos são congruentes, podemos, recortando ou movimentando seus modelos, colocá-los um sobre o outro fazendo coincidir todos os seus lados e ângulos. Podemos dar a definição:

> **Definição**: dois triângulos correspondentes **$\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$** são **congruentes** se os seus lados e ângulos correspondentes são, respectivamente, congruentes, ou seja, se temos:
>
> $$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ e } \overline{AC} \cong \overline{DF},$$
> $$\angle ABC \cong \angle DEF,\ \angle BCA \cong \angle EFD,\ \angle BAC \cong \angle EDF.$$

Nas construções que analisamos inicialmente, encontramos várias situações em que a correspondência entre os triângulos obtidos pode ser estabelecida de forma que **todos os elementos** dos triângulos correspondentes construídos são **congruentes**. A definição de congruência exige que todos os lados e todos os ângulos correspondentes tenham a mesma medida. Isso significa que teríamos de comparar **seis medidas**, de três segmentos e três ângulos.

O objetivo do nosso estudo agora será estabelecer um **número mínimo** de elementos (lados ou ângulos) correspondentes congruentes que garanta a congruência de dois triângulos. As situações acima estudadas, em que a possibilidade de construção é **única**, a menos de movimentos do plano são especialmente consideradas: nos dão os chamados **casos de congruência de triângulos**.

Euclides de Alexandria

Supõe-se que tenha vivido entre 325 e 265 a.C., escreveu a maior obra da Matemática da antiguidade, *Os Elementos*. Nesse trabalho temos, reunidos em treze livros, resultados importantes de Geometria e da Teoria dos Números organizados na forma axiomático-dedutiva, constituindo-se em um modelo que influenciou fortemente o conhecimento científico.

A primeira construção (cujos dados são os **três lados**) nos garante a unicidade e podemos formalizá-la como o

Caso LLL de Congruência de Triângulos: dois triângulos que têm todos os lados correspondentes congruentes são congruentes.

Quando forem dados **dois lados e um ângulo**, conseguimos construir um único triângulo a menos de sua posição quando os lados ficam contidos nos lados do ângulo. Nesse caso, temos:

Caso LAL (também chamado Postulado de Congruência): dois triângulos que têm dois lados correspondentes e o ângulo adjacente a ambos respectivamente congruentes são congruentes.

Quando forem dados **dois ângulos e um lado**, conseguimos construir um único triângulo a menos de sua posição quando o lado é comum aos dois ângulos. Nesse caso, temos:

Caso ALA de Congruência de Triângulos: dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes e o lado compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes.

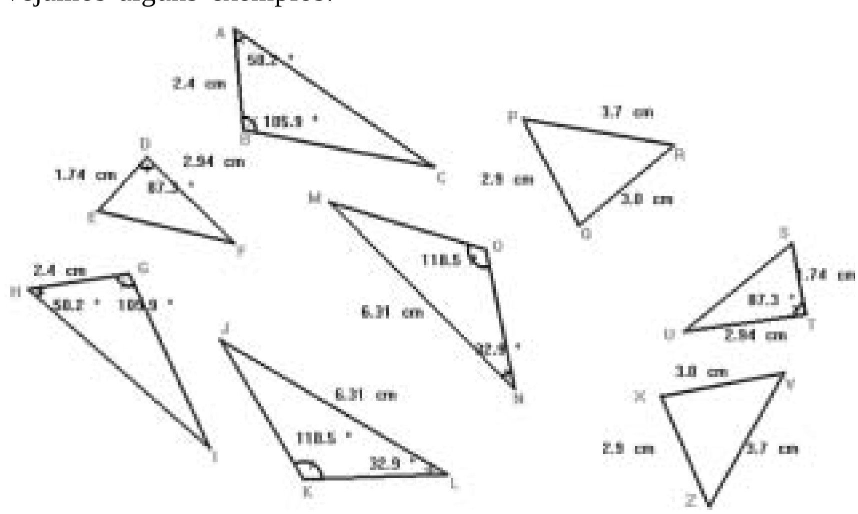
A segunda alternativa de construção que analisamos é o chamado caso **lado – ângulo – ângulo oposto**, em que um dos ângulos contém o lado e o outro é o ângulo oposto a ele:

Caso LAA_o de Congruência de Triângulos: dois triângulos que têm dois ângulos correspondentes e o lado oposto a um deles respectivamente congruentes são congruentes.

Resumindo, temos as possibilidades:

Dados	Caso de Congruência
Três lados	LLL
Dois lados e um ângulo	LAL
Um lado e dois ângulos	ALA
Um lado e dois ângulos	LAA_o

Vejamos alguns exemplos:



Arquimedes de Siracusa

Viveu entre 287 e 212 a.C., tendo se destacado pela criatividade e múltiplas habilidades em explorar as aplicações da Matemática, relacionando-as com os problemas do dia-a-dia e com a construção de equipamentos e artefatos de guerra. Considerado um dos grandes matemáticos da antiguidade, a característica principal do seu trabalho é a utilização de métodos experimentais para a descoberta de propriedades geométricas.

Vamos analisar as correspondências:

1 . ΔABC ↔ ΔHGI

Temos: **∠ABC ≅ ∠HGI (ângulo),** $\overline{AB} \cong \overline{HG}$ **(lado), ∠BAC ≅ ∠GHI (ângulo**), logo, a correspondência é uma congruência pelo caso **ALA** de congruência (o lado está compreendido entre os ângulos).

2. ΔDEF ↔ ΔTSU

Neste exemplo, temos: $\overline{DE} \cong \overline{TS}$ (**lado**), **∠EDF ≅ ∠STU (ângulo**), $\overline{DF} \cong \overline{TU}$ (**lado**) e a correspondência é uma congruência, pelo caso **LAL** (o ângulo está compreendido entre os lados).

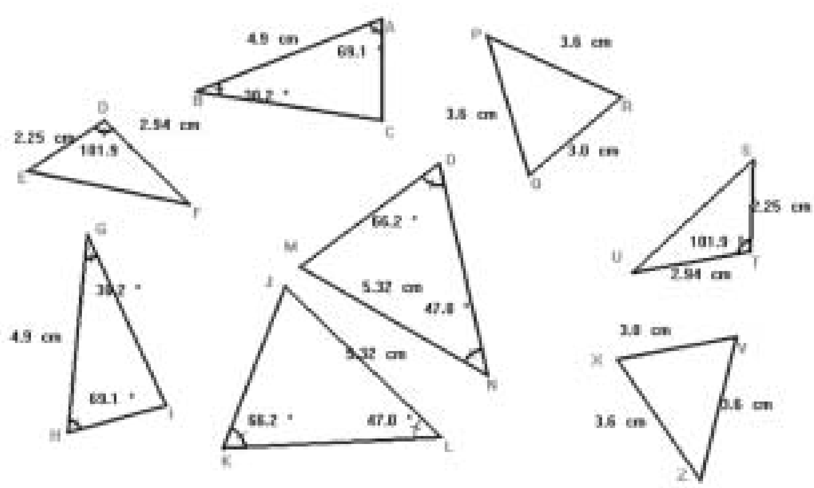
3. ΔJKL ↔ ΔMON temos: $\overline{JL} \cong \overline{MN}$ (**lado**), **∠JLK ≅ ∠MNO** (**ângulo**), **∠JKL ≅ ∠MON** (**ângulo**), sendo que o primeiro ângulo é adjacente ao lado e o segundo oposto a ele. Estamos, portanto, no caso de congruência **LAA**$_{\mathbf{o}}$.

4. ΔPQR ↔ ΔZXV

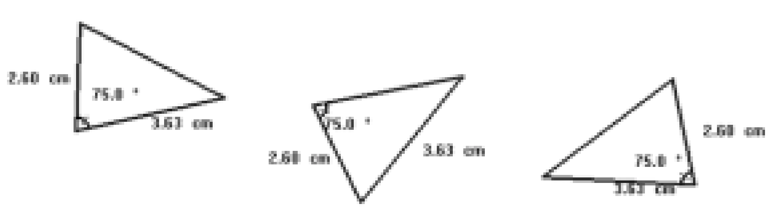
Temos, agora, os três lados correspondentes congruentes: $\overline{PQ} \cong \overline{ZX}$, $\overline{QR} \cong \overline{XV}$ e $\overline{PR} \cong \overline{ZV}$, que nos dá uma congruência **LLL** entre os triângulos correspondentes.

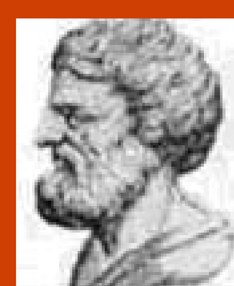
Agora faça você

1. Identifique, entre os triângulos dados a seguir, os pares de triângulos congruentes, estabelecendo a correspondência e identificando o caso de congruência utilizado:



2. Entre os triângulos abaixo, selecione os congruentes, indicando o caso de congruência.

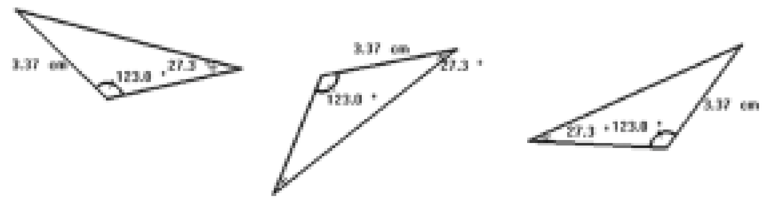




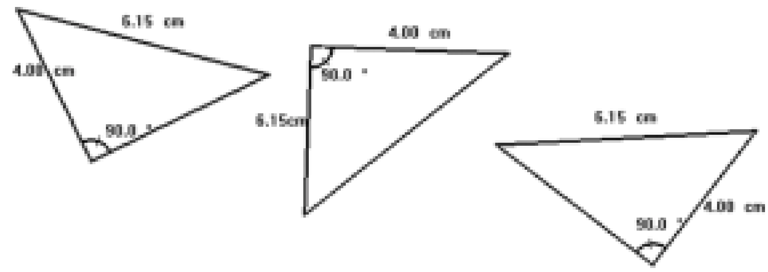
Apolonio de Perga

Nasceu em 262 a.C. em Perga e morreu por volta de 190 a.C. em Alexandria. Matemático e astrônomo, deixou uma grande obra, *As Cônicas*, onde faz um estudo detalhado das principais propriedades das parábolas, elipses e hipérboles. Por esse importante trabalho é também chamado de "o grande geômetra".

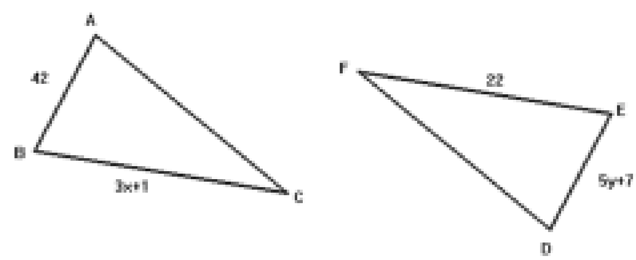
3. Entre os triângulos abaixo, selecione os congruentes, indicando o caso de congruência.

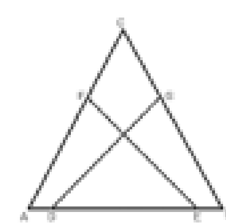


4. Entre os triângulos abaixo, selecione os congruentes, indicando o caso de congruência, se for possível.



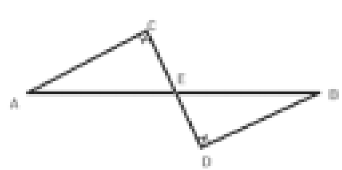
5. Os triângulos correspondentes ΔABC ↔ ΔDEF são **congruentes**. Calcule os valores de x e y:





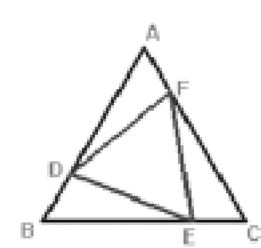
6. Na figura ao lado, temos AC= BC, AF = BG e AE=BD.

Escolha triângulos correspondentes e use a congruência de triângulos para concluir que EF = DG.



7. Na figura à esquerda, o ponto E é o ponto médio do segmento AB. Sabendo que os ângulos nos vértices C e D são congruentes, verifique que o ponto médio E é também o ponto médio do segmento CD.

8. Sobre os lados do triângulo eqüilátero ΔABC, tomamos pontos D, E e F tais que AD = BE = CF. Podemos concluir que o novo triângulo, ΔDEF é eqüilátero? Justifique!



Ptolomeu

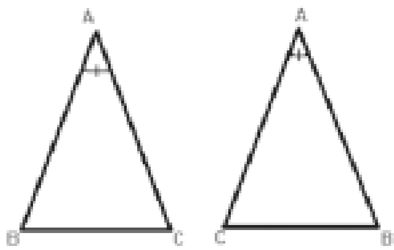
Astrônomo, geógrafo e matemático egípcio, viveu na Alexandria entre os anos 85 e 165 da era cristã. Responsável pela formulação da teoria geocêntrica, segundo a qual a Terra estava no centro do sistema solar, e também por outros trabalhos importantes em Astronomia. O *Almagesto*, sua grande obra matemática, contém uma tabela de cálculo de comprimentos de cordas de uma circunferência, no qual se encontram os primeiros dados da Trigonometria, correspondendo a uma tabela de cálculo de senos, na linguagem atual.

Algumas propriedades importantes

As propriedades dos triângulos que vamos listar a seguir são fatos bem conhecidos que são conseqüências dos casos de congruência:

Proposição: os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Em um triângulo eqüilátero, todos os ângulos são congruentes.

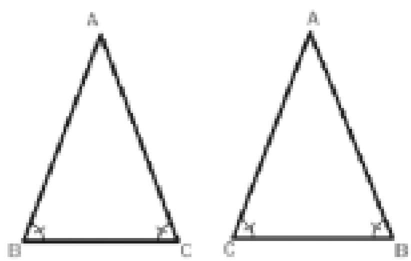
Dado um triângulo isósceles **ΔABC**, em que $\overline{\mathbf{AB}} \cong \overline{\mathbf{AC}}$ (esta é a nossa hipótese), para que a propriedade seja verificada, estabelecemos a correspondência **ΔABC** ↔ **ΔACB** e usamos o caso LAL de congruência para concluir que os triângulos são congruentes. Portanto, temos a tese, isto é, que ∠**ABC** ≅ ∠**ACB** (ângulos correspondentes de triângulos congruentes).



Usando a verificação que acabamos de fazer, como podemos justificar a segunda parte da proposição?

Temos ainda:

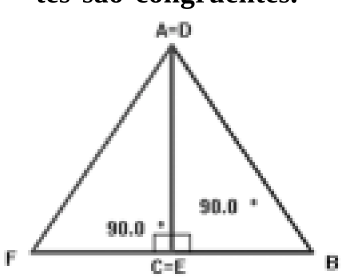
Proposição: se os ângulos da base de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.



Para verificar essa propriedade, dado um triângulo **ΔABC**, com ∠**ABC** ≅ ∠**ACB**, consideramos agora a correspondência **ΔABC** ↔ **ΔACB** e usamos o caso ALA de congruência para concluir que os triângulos são congruentes e que, conseqüentemente, $\overline{\mathbf{AB}} \cong \overline{\mathbf{AC}}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes).

Como conseqüência dessa propriedade dos triângulos isósceles podemos estabelecer um critério de **congruência especial para triângulos retângulos**, que é chamado o **caso cateto-hipotenusa** de congruência para esses triângulos, que pode ser enunciado como um teorema:

Teorema: (caso cateto – hipotenusa de congruência de triângulos retângulos) dois triângulos retângulos que têm a hipotenusa e um cateto congruentes são congruentes.



Dados dois triângulos retângulos **ΔABC** e **ΔDEF** – com os ângulos retos nos vértices **C** e **E**, respectivamente, as hipotenusas $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{DF}}$ congruentes, assim como os catetos $\overline{\mathbf{AC}}$ e $\overline{\mathbf{DE}}$, "colando" esses triângulos pelos catetos congruentes –, formamos um triângulo isósceles **ΔABF**. Daí temos que os ângulos dos vértices **B** e **F** são congruentes.

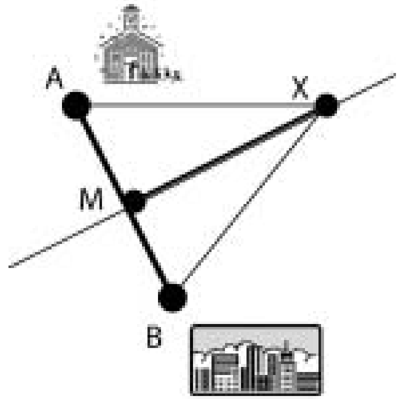
Retornando à correspondência **ΔABC** ↔ **ΔDEF** temos agora uma congruência $\mathbf{LAA_o}$, utilizando qualquer dos lados congruentes, o ângulo reto e esse novo ângulo congruente**.** Volte, agora, ao exercício 4 da página 20.

Nas construções geométricas, e nos problemas práticos, muitas vezes precisaremos de uma reta especial. Vejamos como ela pode ser encontrada num exemplo.

Pappus de Alexandria

Foi o último dos geômetras da escola grega e pouco se sabe sobre sua vida. Indicações e citações conduzem ao período final do século III da era cristã. Além de ter feito uma importante recuperação de muitos resultados, acrescentou a eles contribuições significativas, que até hoje aparecem nos textos didáticos.

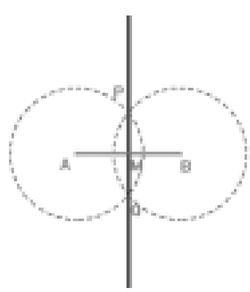
Dadas duas cidades A e B localizadas em uma região idealmente plana, queremos construir uma estrada de forma que, ao percorrê-la, estamos sempre a igual distância de cada uma das cidades.



Se considerarmos o segmento de reta que tem extremos nos pontos que representam as cidades A e B, observamos que o ponto médio M do segmento é um ponto que verifica a condição estabelecida, isto é, é um ponto tal que MA = MB (também chamado um **ponto equidistante de A e B**).

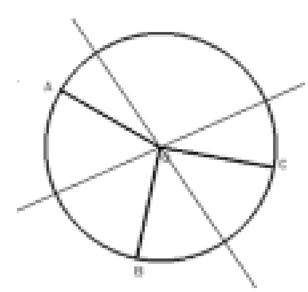
Tomando um ponto X na estrada que pretendemos construir, temos que AX = BX, e os triângulos ΔAMX ↔ ΔBMX verificam o caso LLL de congruência. Como consequência, os ângulos ∠**AMX** e ∠**BMX** são congruentes e, portanto, são ângulos retos. Verificamos assim, que o ponto X pertence à chamada **mediatriz do segmento $\overline{AB}$**, que é a reta do plano, perpendicular ao segmento AB, que passa pelo ponto médio M.

Por outro lado, se considerarmos pontos Y na mediatriz do segmento, podemos verificar também, utilizando a congruência de triângulos, que Y é equidistante de A e B. Em resumo: a solução procurada para o traçado da estrada é a **mediatriz** do segmento que une os pontos que representam as duas cidades

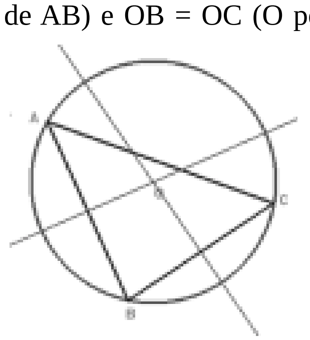


Para construir a mediatriz com régua e compasso é suficiente construir duas circunferências de mesmo raio, com centros nos pontos A e B, respectivamente. Os pontos P e Q de intersecção das circunferências nos dão dois pontos distintos da reta mediatriz (justifique através de uma congruência de triângulos).

Explorando a mediatriz



Dados três pontos distintos e não colineares, (que também podem ser considerados os vértices de um triângulo), seja O o ponto de intersecção das mediatrizes de dois dos segmentos (por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$). Temos que OA = OB (O pertence à mediatriz de AB) e OB = OC (O pertence à mediatriz de BC).



A partir das duas igualdades, temos que OA = OB = OC. Logo, O é também um ponto da mediatriz do segmento $\overline{AC}$, e a circunferência com centro O e raio r = OA=OB=OC é a **circunferência que passa pelos pontos A, B e C**, ou ainda, **a circunferência circunscrita ao triângulo ΔABC**.

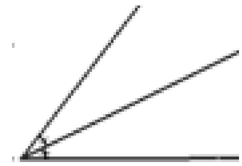
Proclus

Viveu entre 411 e 485 d.C., estudou em Alexandria e Atenas dedicando-se à Filosofia, à poesia e à Matemática. Escreveu *Comentários*, sobre a obra de Euclides, que são a principal fonte de conhecimento que temos desse grande trabalho, e também sobre a História da Geometria, escrita por Eudemus, em 300 anos a.C., sendo, por essa razão, a principal fonte de conhecimento da Geometria da antiguidade.

Segundo Proclus:

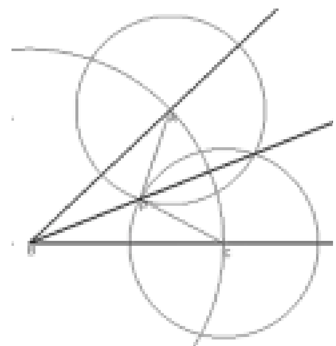
...isto, portanto, é Matemática; ela nos revela a forma invisível da alma; ela dá vida às suas próprias descobertas; desperta a mente e purifica o intelecto; traz à luz nossas idéias mais intrínsecas; elimina o vazio e a ignorância que trazemos no nascimento.

Quando trabalhamos e estudamos propriedades dos ângulos, freqüentemente precisamos dividi-los, encontrando ângulos congruentes. No caso mais simples de divisão nos utilizamos da **bissetriz**, que é uma semi-reta que forma, com os lados do ângulo, dois novos ângulos com a mesma medida.

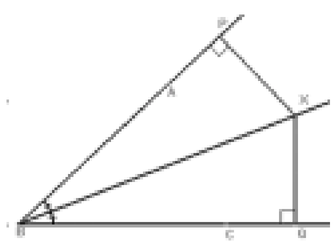


A construção da bissetriz usando a régua e o compasso é feita através de três circunferências: uma com raio qualquer e centro no vértice do ângulo (de forma que BA = BC) e as duas outras com o mesmo raio e centro nos pontos de intersecção da primeira com os lados do ângulo (de forma que AP = CP), conforme a figura.

Os triângulos correspondentes Δ**ABP** $\leftrightarrow$ Δ**CBP** são congruentes, pelo caso LLL de congruência, pois os lados correspondentes são os raios das circunferências e BP é um lado comum. Conseqüentemente, os ângulos correspondentes desses triângulos serão congruentes, $\angle$**ABP** $\cong$ $\angle$**CBP** e, portanto, BP é a bissetriz procurada.



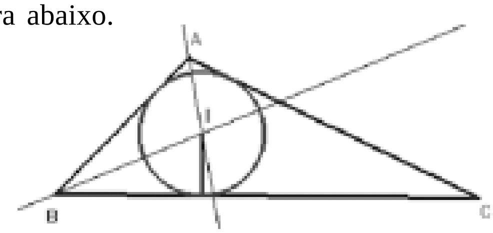
Os pontos da bissetriz têm uma importante propriedade que a caracteriza como um lugar geométrico: são pontos que estão à mesma distância dos lados do ângulo (que é o comprimento do segmento perpendicular), conforme ilustra a figura a seguir:



Tomando um ponto X na bissetriz do ângulo, os triângulos retângulos correspondentes Δ**BXP** $\leftrightarrow$ Δ**BXQ** serão congruentes pelo caso LAA_o, logo, os lados correspondentes **XP** e **XQ** serão congruentes.

Os comprimentos dos segmentos congruentes **XP** e **XQ** são, por definição, as distâncias do ponto X às semiretas BP e BQ, respectivamente.

Uma das aplicações práticas da bissetriz está relacionada à determinação do centro e do raio de uma circunferência que tangencia os três lados de um triângulo, ou seja, do encaixe perfeito de uma tubulação numa região triangular, como na figura abaixo.

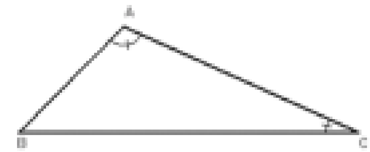


O "problema da menor distância"

Outras propriedades importantes dos triângulos, cujas verificações são mais trabalhosas, podem ser ainda obtidas utilizando congruências. Algumas delas são:

Proposição: em um triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado e, reciprocamente, ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Por exemplo, na figura ao lado, se m ($\angle$**BAC)** > m ($\angle$**BCA**), então **BC > AB**, ou se **BC > AB**, então m ($\angle$**BAC)** > m ($\angle$**BCA**).

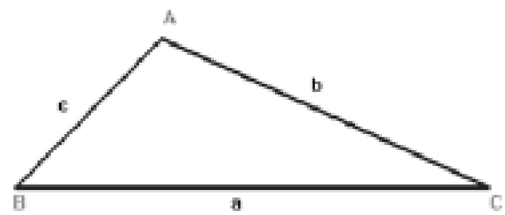


Como conseqüência dessa propriedade, temos uma importante propriedade dos triângulos retângulos:

O ângulo reto é o maior ângulo de um triângulo retângulo e a hipotenusa o seu maior lado.

Temos ainda:

Teorema (desigualdade triangular): em um triângulo, o comprimento de qualquer dos lados é menor do que a soma do comprimento dos outros dois.

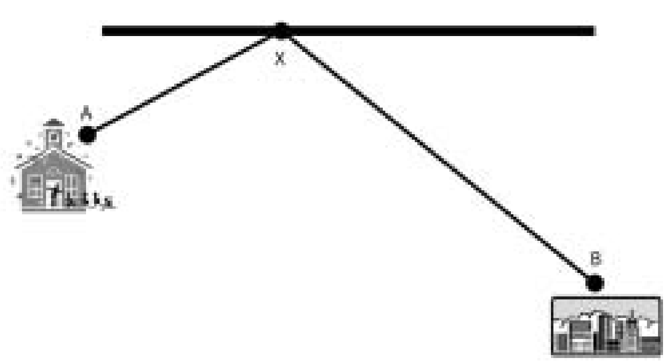


Se, no triângulo Δ**ABC** acima, chamarmos **a** = **BC**, **b** = **AC** e **c** = **AB** os comprimentos dos três lados, temos:

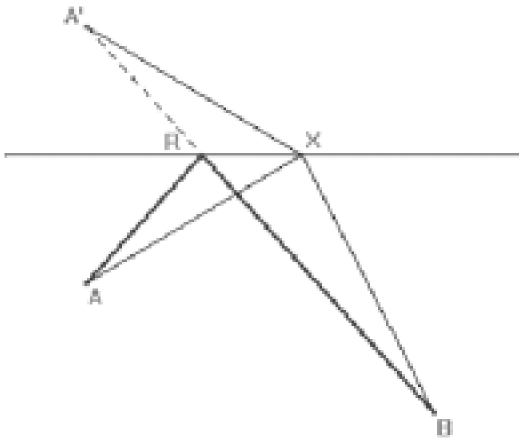
$$\mathbf{a < b + c}$$
$$\mathbf{b < a + c}$$
$$\mathbf{c < a + b}$$

A desigualdade triangular nos permite resolver o chamado “**problema da menor distância**”.

Suponhamos que, dadas duas cidades situadas de um mesmo lado de uma estrada, queremos construir um posto de abastecimento em um ponto da estrada de forma que, se formos de uma cidade a outra, com parada obrigatória no posto, a distância percorrida é a menor possível. Onde deve ficar o posto?



Um esboço da solução é dado na figura a seguir: o ponto A’ é o simétrico do ponto A em relação à reta que representa a estrada e o ponto R é a intersecção do segmento A’B com essa mesma reta.



A congruência de triângulos nos garante que A'R = AR.

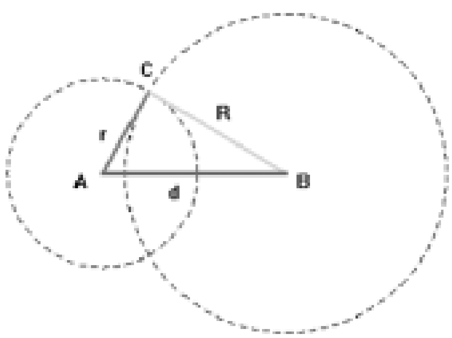
Tomando um ponto X, na reta que representa a estrada, X diferente de R, teremos A'X = AX .

No triângulo **ΔA'BX**, pela desigualdade triangular,

A'R + RB < A'X + XB, ou seja,
AR + RB < AX + XB

O ponto R nos dá, portanto, a menor soma para as distâncias percorridas na viagem de A até B.

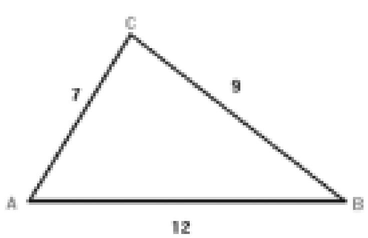
Finalmente, observamos que a desigualdade triangular nos dá a condição necessária para que duas circunferências se interceptem, fato esse da construção geométrica que estamos utilizando desde o início da discussão sobre congruência de triângulos.



Como cada um dos pontos de intersecção de duas circunferências determina com os seus centros um triângulo, como na figura ao lado, devemos ter a relação entre os raios (**r** e **R**) e a distância (**d**) entre os centros verificando a desigualdade triangular em qualquer ordem, isto é:

d < r + R
R < d + r
r < d + R

Um exemplo



No triângulo ΔABC da figura, qual é o maior ângulo? E o menor?

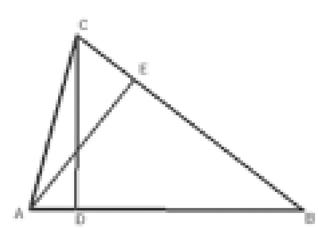
O maior ângulo será o ângulo ∠ACB, que se opõe ao maior lado ($\overline{AB}$) e o menor ângulo será ∠ABC que se opõe ao menor lado ($\overline{AC}$).

Agora faça você

1. Em um triângulo ΔPQR, temos os ângulos dos vértices P, Q e R medindo, respectivamente, 72º, 37º e 71º. Indique qual o maior lado e qual o menor lado do triângulo.

2. Complete as desigualdades, considerando os triângulos adequados, na figura ao lado:

CD < ....+......; CD < ....+......
AE < ....+......; AE < ....+......



3. Verifique se é possível construir um triângulo cujos lados tenham por comprimento:

a) 12 cm, 9 cm e 20 cm
b) 12 cm, 12 cm e 20 cm
c) 1 cm, 1 cm, 1 cm
d) 12 cm, 9 cm, 2 cm

4. Se um triângulo isósceles tem um lado que mede 10 cm e o outro medindo 4 cm, o que podemos afirmar sobre o comprimento do terceiro lado?

5. Se um triângulo tem dois lados medindo 10 cm, o que se pode dizer sobre o comprimento do terceiro lado?

6. Os comprimentos dos lados de um triângulo são dados por $2x$-3, x+6 e $3x$-12 unidades. Verifique que, se o triângulo for isósceles, então ele será eqüilátero.

Unidade 2

Semelhanças

Organizadores

Antônio Carlos Brolezzi

Elvia Mureb Sallum

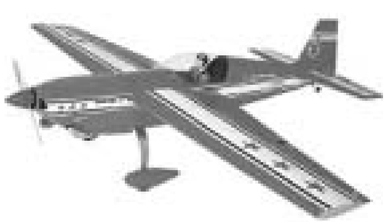
Martha S. Monteiro

Elaboradoras

Cláudia Cueva Candido

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

A relação de congruência estudada na unidade anterior é essencial no desenvolvimento da moderna tecnologia. Como exemplo, citamos a produção em série de veículos automotores que só é possível graças a confecção de várias cópias congruentes, idênticas em tamanho e forma de seus componentes.



Analogamente, a relação de "mesma forma" tem um papel importante em nosso cotidiano. O projeto de construção de um edifício ou de uma aeronave, por exemplo, com frequência requer a produção de modelos e maquetes em miniatura, com a mesma forma que o objeto original, permitindo obter um amplo entendimento de sua complexa estrutura.

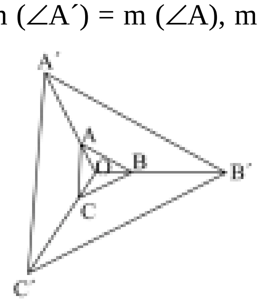
A ampliação ou redução fotográfica é outro recurso utilizado para revelar com detalhes aspectos intrincados de certas situações, como a confecção da planta de uma cidade, por exemplo. Trata-se de um processo útil, pois preserva a forma dos objetos fotografados.

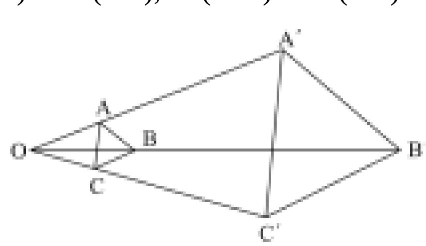
Nesta unidade queremos responder a duas questões básicas. Qual o significado matemático de "mesma forma"? Que propriedades geométricas caracterizam duas figuras (entenda-se por **figura** um conjunto não vazio de pontos) que possuam a mesma forma?

Para ampliar ou reduzir um triângulo ΔABC, fixamos um ponto qualquer O no plano do triângulo e, a partir dele, traçamos semi-retas que passam pelos vértices do triângulo. Uma possível ampliação é obtida considerando-se os pontos A', B' e C' pertencentes às semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$, respectivamente, tais que $OA' = 3OA$, $OB' = 3OB$ e $OC' = 3OC$. Usando uma régua graduada, um compasso ou um transferidor podemos verificar que

$$A'B' = 3\,AB,\ B'C' = 3\,BC,\ A'C' = 3\,AC \text{ e}$$

$$m(\angle A') = m(\angle A),\ m(\angle B') = m(\angle B),\ m(\angle C') = m(\angle C)$$

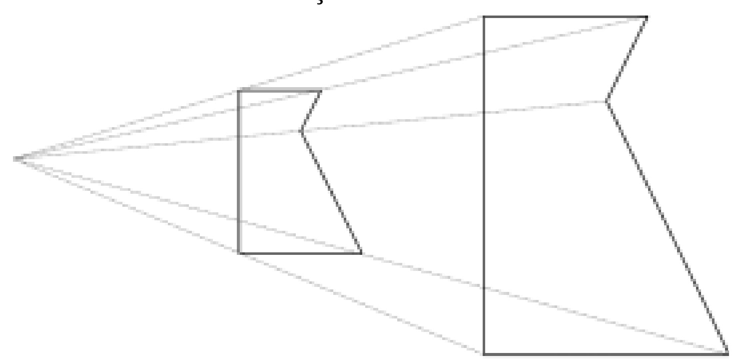




A correspondência que a cada ponto P de um fixado plano, P distinto de O, associa o único ponto P´ da semi-reta $\overrightarrow{OP}$ tal que OP´ = k.OP chama-se **homotetia de centro O e razão $k > 0$**.

O ponto P´ é chamado a **imagem** de P pela homotetia. A imagem do centro O é, por definição, o próprio ponto O. Se determinarmos a imagem de todos os pontos de uma figura F, obteremos uma segunda figura $F´$ chamada a **imagem homotética** de F.

Observe que se escolhermos a razão k como sendo um número real $k > 1$ então $F´$ será uma ampliação de F enquanto que se a razão k satisfizer $0 < k < 1$ então $F´$ será na verdade uma redução de F.



Voltando ao nosso primeiro exemplo, podemos perguntar sobre as possíveis propriedades da imagem homotética $F´$ no caso em que F é uma das retas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ou $\overline{AC}$. O desenho apresentado parece indicar que não apenas $F´$ será também uma reta como será uma reta paralela à reta original.

Duas retas distintas r e s são ditas **paralelas** (notação: r // s) se forem coplanares e não se intersectarem.

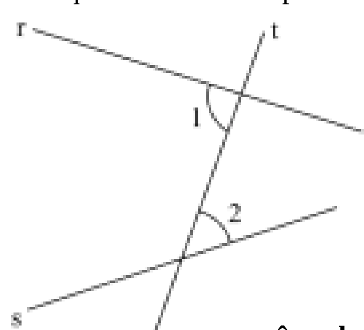
Repetindo, dadas duas retas distintas r e s temos r // s se e somente se:

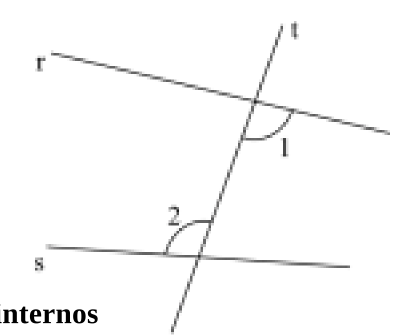
a) existir um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$;
b) $r \cap s = \varnothing$

Para que possamos estabelecer condições que garantam o paralelismo entre duas retas, algumas definições adicionais são necessárias.

Uma **transversal** em relação a duas retas coplanares é uma reta que as intersecta em dois pontos distintos.

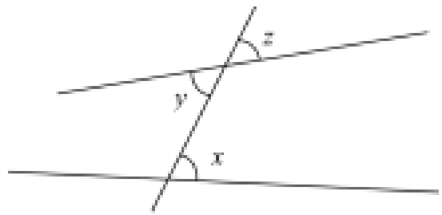
Em cada uma das figuras seguintes a reta t é uma transversal às retas r e s. Além disso, os ângulos indicados por $\angle 1$ e $\angle 2$ são chamados **ângulos alternos-internos**. Observe que retas cortadas por uma transversal podem não ser paralelas.





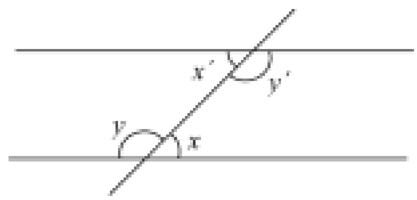
ângulos alternos internos

Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se $\angle x$ e $\angle y$ são ângulos alternos-internos e se $\angle y$ e $\angle z$ são ângulos opostos pelo vértice, então $\angle x$ e $\angle z$ são chamados **ângulos correspondentes**.



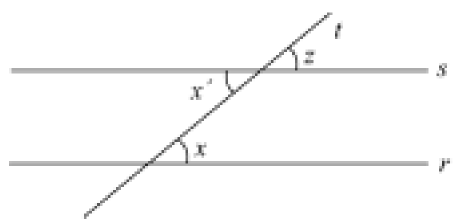
$\angle x$ e $\angle z$: **ângulos correspondentes**

Uma observação fácil, porém importante, é que se um par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes, então o outro par de ângulos alternos-internos também é formado por ângulos congruentes. Isto é, se $\angle x \cong \angle x'$ então $\angle y \cong \angle y'$ e, reciprocamente, se $\angle y \cong \angle y'$ então $\angle x \cong \angle x'$.

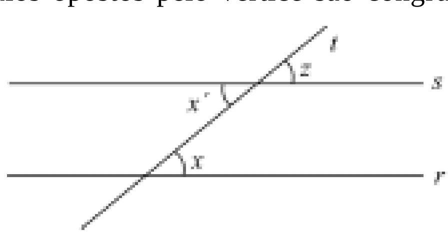


Proposição. Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos alternos-internos é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

Na figura abaixo temos que se $\angle x \cong \angle x'$ então $r \,//\, s$.



Podemos dar outras condições suficientes para o paralelismo entre duas retas usando ângulos correspondentes no lugar de ângulos alternos-internos. Para isso devemos observar inicialmente que se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes então qualquer par de ângulos alternos-internos também é formado por ângulos congruentes (lembre-se que ângulos opostos pelo vértice são congruentes).

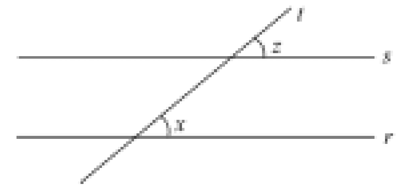


$$\left.\begin{array}{l}\angle x \cong \angle z \\ \angle z \cong \angle x'\end{array}\right\} \Rightarrow \angle x \cong \angle x'$$

Conseqüentemente temos a seguinte condição:

Proposição. Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.

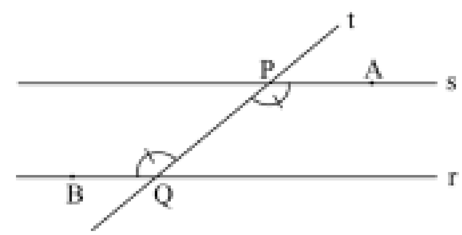
Na figura abaixo temos que se $\angle x \cong \angle z$ então $r \,//\, s$.



Qualquer uma dessas proposições nos permite resolver o seguinte problema básico da Geometria Plana:

Dados uma reta *r* e um ponto P fora de *r*, traçar, com régua e compasso, uma reta *s* que passa por P e é paralela a *r*.

A solução é simples. Seja t uma reta arbitrária que passa por P e intersecta r num ponto Q, escolha sobre r um ponto B distinto de Q. Este ponto B está em um dos semi-planos definido pela reta t. No outro semi-plano construa, a partir da semi-reta $\overrightarrow{PQ}$, o ângulo $\angle QPA$ congruente ao ângulo $\angle PQB$. A reta determinada pelos pontos P e A é a paralela procurada.



O leitor mais atento deve notar que a construção acima prova a existência da paralela a uma dada reta por um ponto dado. Será possível provar também a **unicidade** de tal paralela? Esse problema desafiou os matemáticos durante mais de 2.000 anos, desde a antiga Grécia, e o resultado obtido foi a necessidade de se introduzir um novo postulado na Geometria, conhecido hoje como **postulado das paralelas**. A título de informação, destacamos que a solução desse problema culminou com a descoberta das primeiras **geometrias não euclidianas**. Mas isso é uma outra história...

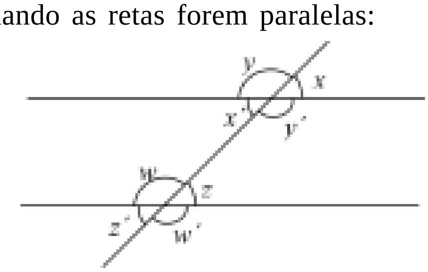
Postulado das paralelas: dados uma reta r e um ponto P fora de r, existe no máximo uma reta s que passa por P e é paralela a r.

É através do postulado acima que podemos provar os recíprocos das proposições anteriores.

Proposição. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então ambos os pares de ângulos alternos-internos são formados por ângulos congruentes.

Proposição. Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então cada par de ângulos correspondentes é formado por ângulos congruentes.

Como conseqüência das proposições acima, dadas duas retas cortadas por uma transversal, temos um resumo dos pares de ângulos determinados e de suas propriedades quando as retas forem paralelas:



Ângulos **alternos internos** (congruentes): $\angle x'$ e $\angle z$, $\angle y'$ e $\angle w$

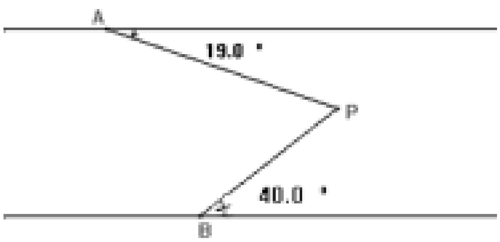
Ângulos **alternos externos** (congruentes): $\angle w'$ e $\angle y$, $\angle x$ e $\angle z'$

Ângulos **correspondentes** (congruentes): $\angle x$ e $\angle z$, $\angle y'$ e $\angle w'$, $\angle x'$ e $\angle z'$, $\angle y$ e $\angle w$

Ângulos **colaterais internos** (suplementares): $\angle y'$ e $\angle z$, $\angle x'$ e $\angle w$

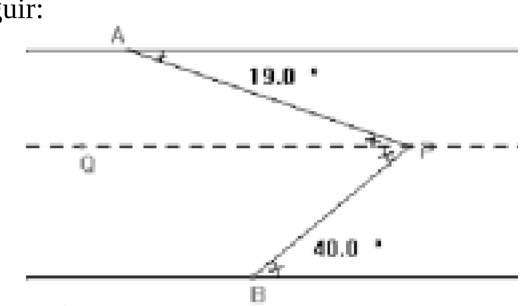
Ângulos **colaterais externos** (suplementares): $\angle w'$ e $\angle x$, $\angle y$ e $\angle z'$

Um exemplo



De uma posição representada pelo ponto P, no interior de uma sala, são conhecidos os ângulos entre os segmentos AP e BP e as paredes. Qual será o ângulo de visão $\angle APB$ que permite que enxerguemos os pontos A e B situados em paredes opostas?

A solução para o problema pode ser obtida com o auxílio de uma paralela pelo ponto P, como na figura a seguir:



Dessa forma, temos dois pares de ângulos alternos internos. No primeiro par, a medida do ângulo $\angle APQ$ é 19º, e no segundo par, a medida do ângulo $\angle BPQ$ é 40º. Daí, a medida do ângulo $\angle APB$ será a soma das medidas:

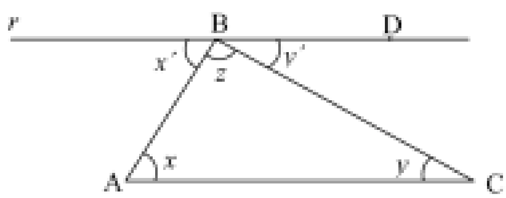
$m(\angle APB) = m(\angle APQ) + m(\angle BPQ) =$

$19^o + 40^o = 59^o$

Ainda como conseqüência do postulado das paralelas, temos um dos mais conhecidos resultados sobre triângulos:

Proposição. A soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é igual a 180°.

Sua demonstração não é difícil e pode ser acompanhada na figura abaixo.



Dado um triângulo ΔABC, seja *r* a reta que passa por B e é paralela ao lado $\overline{AC}$. Sendo $\angle x$, $\angle x'$, $\angle y$, $\angle y'$ e $\angle z$ os ângulos indicados na figura temos:

$m(\angle x) = m(\angle x')$ e $m(\angle y) = m(\angle y')$ por serem alternos internos e $r \, // \, \overline{AC}$.

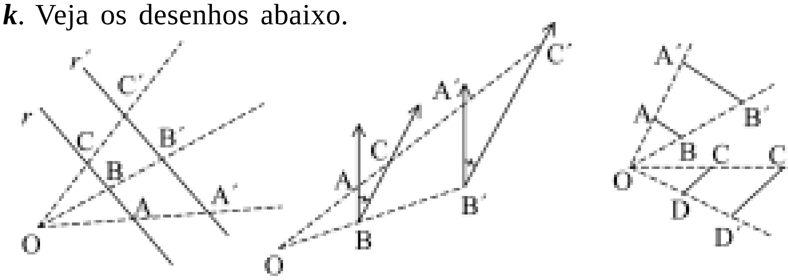
Mas, pelas propriedades de adição de ângulos, temos:

$m(\angle x') + m(\angle z) + m(\angle y') = m(\angle x') + m(\angle ABD) = 180°$.

E finalmente, por substituição simples, concluímos que:

$m(\angle x) + m(\angle z) + m(\angle y) = 180°$.

Terminada essa breve apresentação sobre paralelismo de retas, voltamos nossa atenção novamente para as **homotetias** destacando principalmente quais figuras geométricas e quais medidas são preservadas por uma **homotetia de razão *k***. Veja os desenhos abaixo.



1. A relação "estar entre" é preservada, isto é, se B está entre A e C então B´ está entre A´ e C´.

2. Retas são preservadas, isto é, se *r* é uma reta então o conjunto r´ das imagens de todos os pontos de *r* é também uma reta. Mais ainda, ou *r´* = *r* ou *r´* é paralela a *r*.

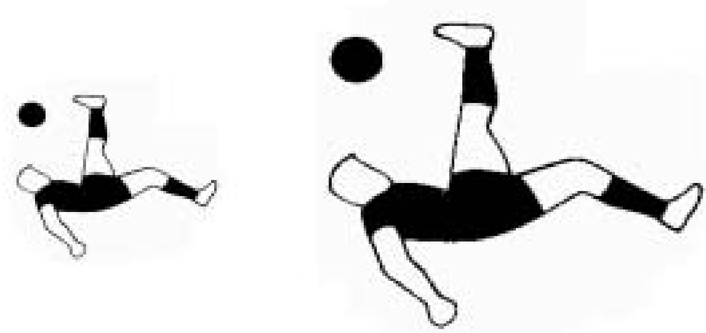
3. Segmentos e semi-retas são preservados, isto é, a imagem de um segmento $\overline{AB}$ é um segmento $\overline{A'B'}$ e a imagem de uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$ é uma semi-reta $\overrightarrow{A'B'}$.

4. Ângulos e suas medidas são preservados, isto é, a imagem de um ângulo $\angle ABC$ é um ângulo $\angle A'B'C'$ e m $(\angle ABC)$ = m $(\angle A'B'C')$.

5. A razão das distâncias é preservada, isto é, dados os pontos A, B, C e D temos

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}=k$$

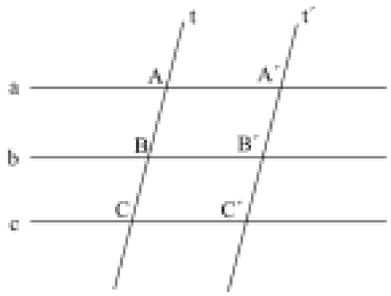
Observamos que as propriedades acima nos respondem à primeira questão básica colocada no início desta unidade. Dada uma figura plana *F* e sua imagem *F´* por uma homotetia de razão *k*, o fato de que a distância A´B´ é *k* vezes a distância AB para cada par de pontos distintos A e B de *F* e o de que a medida dos ângulos formados são preservados constituem os atributos matemáticos necessários para que *F* e *F´* tenham a **mesma forma**.

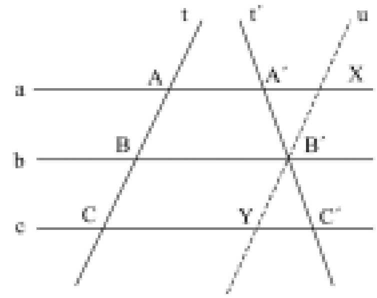


Embora as propriedades das homotetias possam ser verificadas experimentalmente, por exemplo, utilizando-se os instrumentos de desenho (régua, compasso e transferidor), todas elas podem ser provadas a partir de um dos mais importantes teoremas da Geometria conhecido como **Teorema de Tales** e do seu recíproco.

Sejam a, b, c três retas distintas e paralelas cortadas por duas transversais t e t´ nos pontos A, B, C (em t) e A´, B´, C´ (em t´) como na figura abaixo.

Suponha inicialmente que AB = BC.



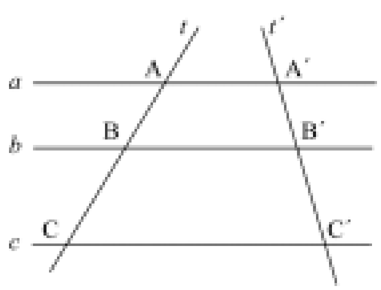


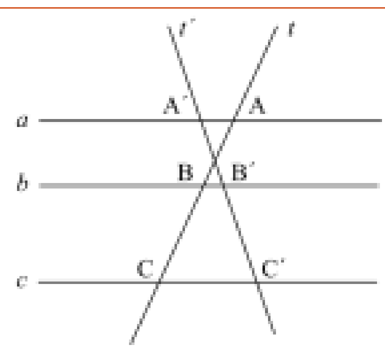
Se *t* e *t´* são retas paralelas, então propriedades elementares de paralelogramos (ver exercício 9) nos garantem que AB = A´B´, BC = B´C´ e, portanto, A´B´ = B´C´. Em outras palavras, podemos escrever que $\frac{AB}{BC}=1=\frac{A'B'}{B'C'}$.

Se *t* e *t´* não são retas paralelas, traçamos por B´ uma reta auxiliar *u* paralela à reta *t*. Como AB = XB´ e BC = B´Y segue da congruência dos triângulos ΔA´B´X e DC´B´Y (você é capaz de identificar qual caso de congruência estamos usando?) que A´B´ = B´C´. Isto é, obtemos novamente a conclusão $\frac{AB}{BC}=1=\frac{A'B'}{B'C'}$.

O teorema de Tales generaliza esse resultado descartando a hipótese inicial AB = BC. Sua demonstração no caso mais geral foge do objetivo dessas notas.

Teorema (Tales). Sejam *a*, *b*, *c* três retas distintas e paralelas cortadas por duas transversais *t* e *t´* nos pontos A, B, C (em *t*) e A´, B´, C´ (em *t´*) como na figura abaixo. Então $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.



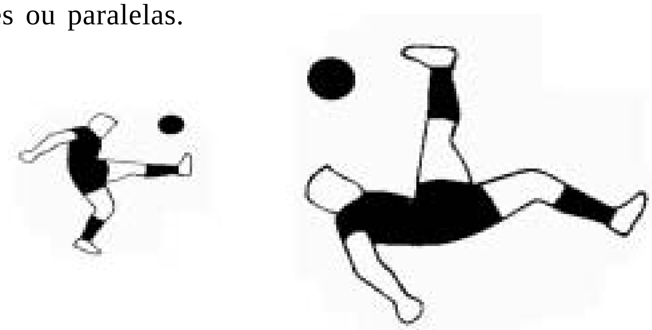


É interessante observar que o resultado acima admite uma espécie de recíproca que é igualmente importante em função de suas aplicações.

Proposição. Sejam *a, b, c* três retas distintas cortadas por duas transversais *t* e *t´* nos pontos A, B, C (em *t*) e A´, B´, C´ (em *t´*) como na figura abaixo. Se $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ e duas das retas *a, b, c* forem paralelas, então a terceira reta será paralela às duas primeiras.

Temos visto anteriormente que uma dada figura plana *F* e sua imagem homotética *F´* têm sempre a mesma forma. A situação inversa, porém, não é verdadeira. Duas figuras podem ter a mesma forma sem que uma seja a imagem da outra por uma homotetia.

Por exemplo, partindo de uma figura e de sua imagem homotética, ao rotacionarmos uma delas não destruímos a qualidade de ambas terem a mesma forma. Contudo, elas agora não podem ser transformadas uma na outra por uma homotetia, uma vez que uma reta e sua imagem homotética são ou coincidentes ou paralelas.



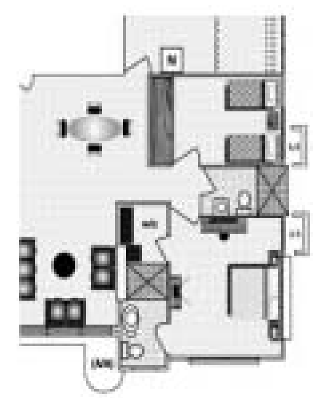
A observação acima nos indica que o estudo da relação "mesma forma", também chamada de semelhança, envolve além da homotetia um certo reposicionamento de uma das figuras no plano que a contém.

> Duas **figuras planas** F e G são **semelhantes** se uma delas é congruente à uma imagem homotética da outra.

Assim F e G são semelhantes se G é congruente a F' onde F' é a imagem de F por uma homotetia.

Note que esta definição de semelhança não é restrita apenas a triângulos ou mesmo a polígonos. Ela aplica-se a todas as figuras planas em geral. Embora ela reflita de modo preciso a idéia que temos de "mesma forma", existem diversos problemas práticos em que é mais conveniente descrever a semelhança em termos de medidas angulares e razões de medidas de segmentos.

Por exemplo, quando um arquiteto projeta um apartamento e existe a necessidade da confecção de uma planta em uma certa escala, que medidas devem ser tomadas?



Como as homotetias preservam a medida angular e a razão das distâncias entre pontos, a definição abaixo resolve nosso problema.

> Dois **polígonos** são **semelhantes** se existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.

Logo, quando dizemos que o triângulo ΔABC é semelhante ao triângulo $\Delta A'B'C'$ (notação: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$) estamos assegurando que $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ é a correspondência biunívoca onde

$$m\,(\angle A) = m\,(\angle A'),\ m\,(\angle B) = m\,(\angle B'),\ m\,(\angle C) = m\,(\angle C')$$

$$\text{e} \qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$$

A constante *k* é chamada a razão de semelhança e nos dá a escala dos mapas ou das plantas. Note, em particular, que se dois triângulos são congruentes então eles também são semelhantes, com razão de semelhança igual a 1.

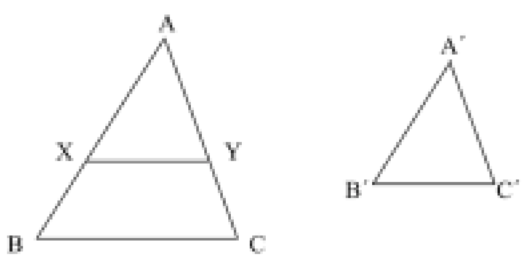
Assim como na congruência, para os triângulos temos os chamados **casos de semelhança**, que nos permitem verificar a sua semelhança a partir da comparação de algumas de suas medidas.

Caso Ângulo – Ângulo (AA) - Dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, se $m\,(\angle A) = m\,(\angle A')$ e $m\,(\angle B) = m\,(\angle B')$ então $\angle ABC \sim \angle A'B'C'$.

Caso Lado – Ângulo – Lado (LAL) - Dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, se $m\,(\angle A) = m\,(\angle A')$ e $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Caso Lado – Lado – Lado (LLL) - Dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, se $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Suas provas envolvem uma adequada aplicação do teorema de Tales. Por exemplo, no caso AA consideramos X e Y nas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AX = A'\,B'$ e $AY = A'C'$.



Pelo caso LAL de congruência temos $\Delta AXY \cong \Delta A'B'C'$ e, portanto, $m\,(\angle AXY) = m\,(\angle B')$. Como $m\,(\angle B) = m\,(\angle B')$ segue que $m\,(\angle AXY) = m\,(\angle B)$.

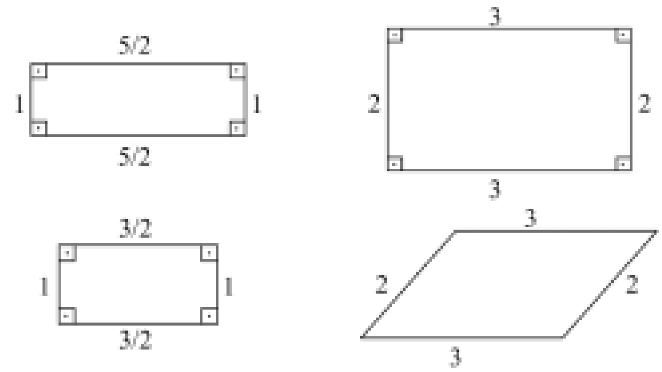
Logo as retas $\overleftrightarrow{XY}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{BX}$ formando um par de ângulos correspondentes congruentes. Concluímos que $\overleftrightarrow{XY} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$ e, pelo teorema de Tales, temos $\dfrac{XB}{AX} = \dfrac{YC}{AY}$. Um cálculo algébrico simples nos dá $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AC}{AY}$.

Mas $AX = A'B'$ e $AY = A'C'$ de modo que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$. Analogamente mostramos que $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, ou seja, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Os demais casos são provados usando-se idéias similares.

Queremos aqui enfatizar que os casos acima valem exclusivamente para triângulos. O caso AA nos diz que a congruência de ângulos correspondentes é suficiente para garantir a proporcionalidade dos lados correspondentes. Já o caso LLL nos diz que a proporcionalidade dos lados correspondentes implica na congruência dos ângulos correspondentes.

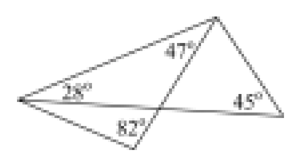
A seguir, o primeiro desenho exibe dois retângulos – portanto, com ângulos correspondentes congruentes (todos retos) –, sem que eles sejam semelhantes. O segundo mostra um retângulo e um paralelogramo com lados correspondentes proporcionais, sem que eles sejam semelhantes.



Agora faça você

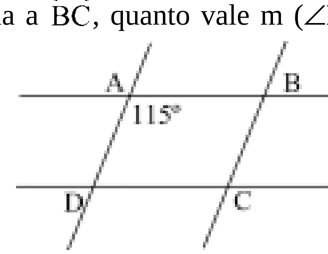
1. A medida de um ângulo de um triângulo é 25° maior que a medida de um segundo ângulo e a medida do terceiro é 19° menor que duas vezes a medida do segundo. Calcule cada medida.

2. Na figura ao lado determine a medida de cada ângulo.

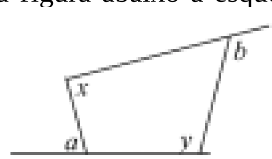


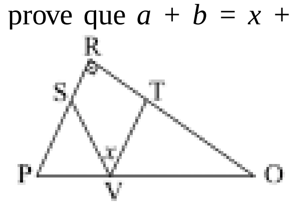
3. As medidas dos ângulos de um triângulo estão na razão de 1:2:3. Ache as medidas de cada ângulo.

4. Se $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a $\overleftrightarrow{DC}$ em m (∠BAD) = 115°, quanto vale m (∠ADC)? Se, além disso, $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, quanto vale m (∠BCD)?



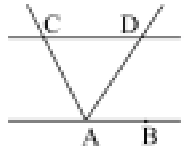
5. Considere a figura abaixo à esquerda e prove que $a + b = x + y$.

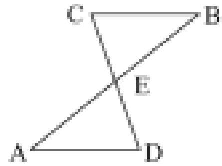




6. Na figura acima à direita ∠PRQ é um ângulo reto, QT = QV e PS = PV. Mostre que a medida indicada por x é igual a 45°.

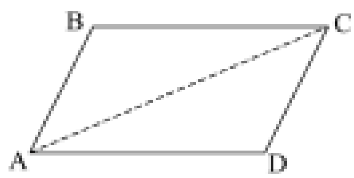
7. Na figura abaixo $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz do $\angle CAB$ e CA = CD. Mostre que $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.





8. Na figura acima $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ dividem-se ao meio em E. Mostre que $\overline{AD}$ é paralelo a $\overline{CB}$.

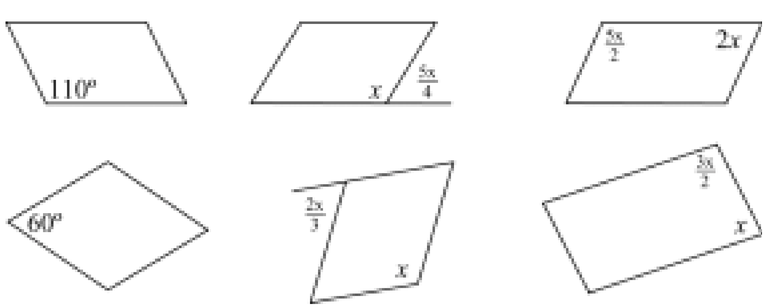
9. Um **paralelogramo** é um quadrilátero no qual ambos os pares de lados opostos são paralelos. Verifique que num paralelogramo ABCD temos $\Delta ABC \cong \Delta CDA$. Conclua daí que dois lados opostos de um paralelogramo são sempre congruentes.



10. Se ABCD é um quadrilátero tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{DA}$, mostre que ABCD é um paralelogramo.

11. Dois ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e suas diagonais se dividem ao meio. Prove essas propriedades.

12. Nos paralelogramos abaixo calcule as medidas de seus ângulos.



13. Um **retângulo** é um quadrilátero cujos ângulos são todos retos. Um **losango** é um paralelogramo cujos lados são todos congruentes. Um **quadrado** é um retângulo cujos lados são todos congruentes. Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique.

a) Todo retângulo é também um paralelogramo.

b) Todo quadrado é um paralelogramo.

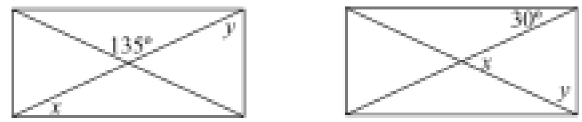
c) Todo losango é um quadrado.

d) Todo retângulo é um quadrado.

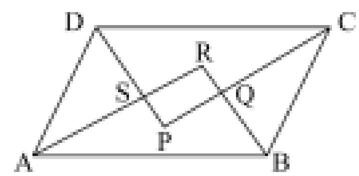
e) Todo quadrado é um retângulo.

f) Todo quadrado é um losango.

14. Nos retângulos abaixo calcule as medidas angulares x e y.



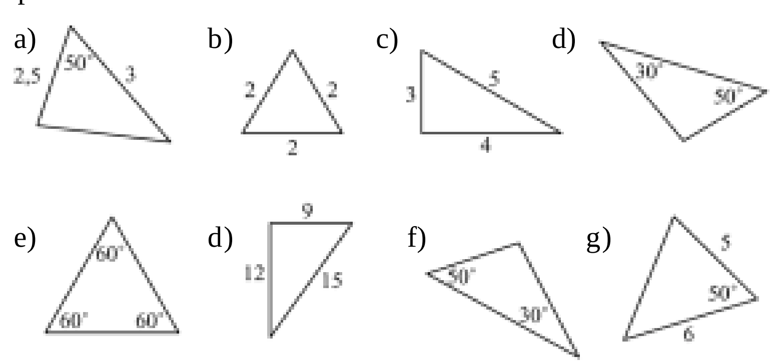
15. Prove que o quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos de um paralelogramo é um retângulo.



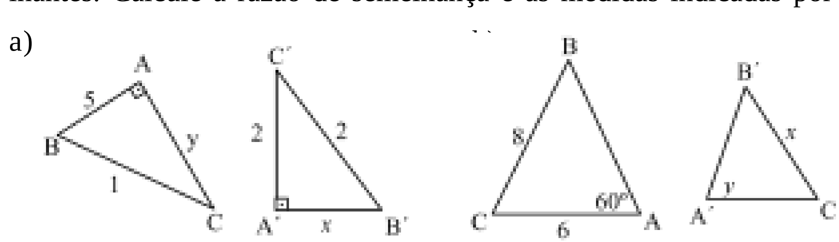
16. Nas figuras abaixo temos *a* // *b* // *c*. Calcule as medidas *x* e *y*.

17. Nas figuras abaixo temos $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$. Calcule o valor de *x*.

18. Indique os pares de triângulos abaixo que são semelhantes e o caso correspondente.



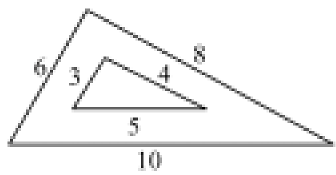
19. Cada par dos triângulos ΔABC e ΔA´B´C´ das figuras abaixo são semelhantes. Calcule a razão de semelhança e as medidas indicadas por *x* e *y*.

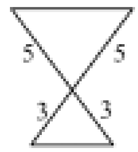


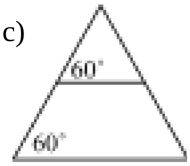
20. O perímetro de um triângulo ΔABC é 90 cm. O perímetro de um triângulo ΔA´B´C´ semelhante ao primeiro é 15 cm. Qual a razão de semelhança entre os triângulos?

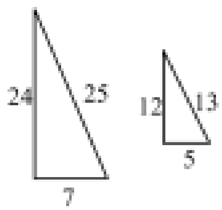
21. Os lados de um triângulo medem 8 cm, 18 cm e 16 cm. Um triângulo semelhante a este tem 21 cm de perímetro. Calcule as medidas dos lados do segundo triângulo.

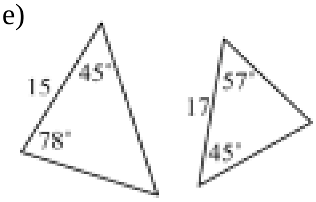
22. Para cada par dos triângulos abaixo, indique quais são semelhantes. Justifique sua resposta usando os casos de semelhança.

a)


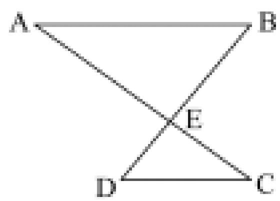
b)


c)


d)


e)


23. Na figura abaixo temos $\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}$. Mostre que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DC}$.



24. É possível dois triângulos serem semelhantes se

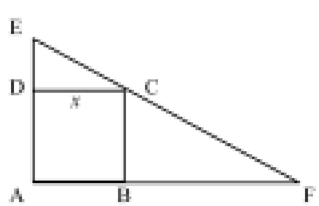
a) dois ângulos de um deles medem 60° e 70°, enquanto dois ângulos do outro medem 50° e 80°?

b) dois ângulos de um deles medem 45° e 75°, enquanto dois ângulos do outro medem 45° e 60°?

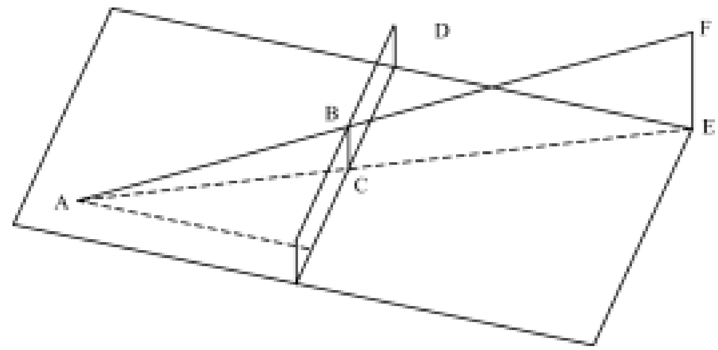
c) um deles tem um ângulo de medida 40° e dois lados de comprimento 5, enquanto que o outro tem um ângulo de medida 70° e dois lados de medida 8 cada um?

d) um deles tem lados de comprimentos 5, 6 e 9, enquanto que o outro tem um perímetro igual a 8.420.000?

25. Na figura abaixo ABCD é um quadrado, AE = 4 e AF = 6. Calcule a medida *x*.



26. Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 2,10 m e passa rente à rede a uma altura de 0,90 m. Se a bola é sacada de uma linha a 11,70 m da rede e segue em linha reta, a que distância da rede ela atingirá a quadra?

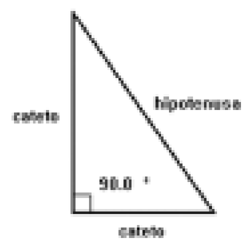


Unidade 3

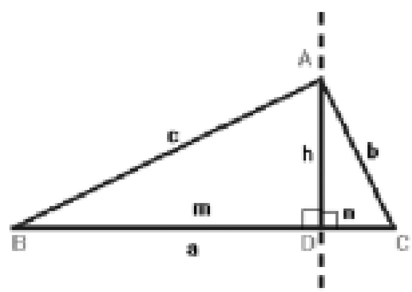
Relações métricas no triângulo retângulo

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaboradora
Cláudia Cueva Candido

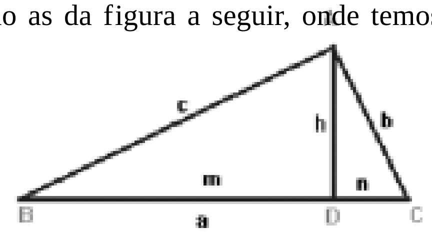
Um **triângulo retângulo** é um triângulo que tem um ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados **catetos**. Os ângulos não retos de um triângulo retângulo são agudos e complementares, isto é, a soma de suas medidas é igual a 90°.



Por um vértice de um triângulo podemos tomar a perpendicular ao lado oposto a ele. Uma **altura** do triângulo é o segmento dessa perpendicular com extremos no vértice considerado e no ponto de intersecção da perpendicular com o lado oposto.



Tomemos um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A. As notações que usaremos são as da figura a seguir, onde temos:



a: medida da hipotenusa $\overline{BC}$

b: medida do cateto $\overline{AC}$

c: medida do cateto $\overline{AB}$

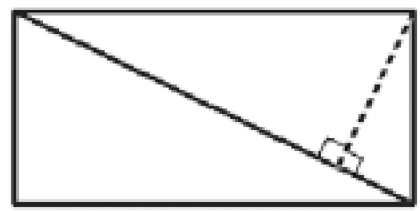
m: medida da projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa

n: medida da projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa

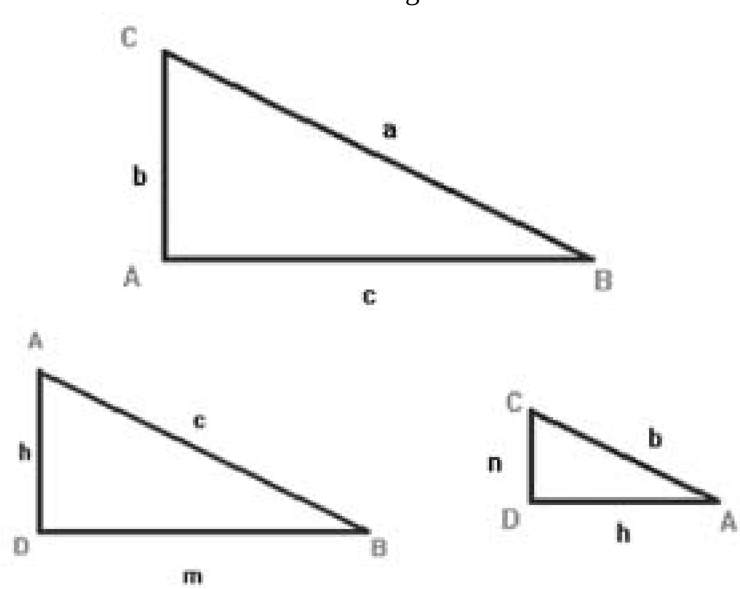
h: medida da altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa

Se dividirmos um triângulo retângulo pela altura relativa à hipotenusa, encontraremos dois triângulos retângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.

Para visualizar tais semelhanças, recorte uma folha de papel pela diagonal, obtendo dois triângulos retângulos congruentes; separe um dos triângulos retângulos e recorte o outro pela altura relativa à hipotenusa.



Os três recortes estão ilustrados na figura abaixo:



Observe, nos seus recortes, que m∠DBA = m∠ABC e m∠DCA = m∠ACB e que, em cada triângulo, os ângulos não retos são complementares, ou seja:

$$m\angle ABC + m\angle ACB = 90°$$
$$m\angle DBA + m\angle DAB = 90°$$
$$m\angle DCA + m\angle DAC = 90°$$

Das igualdades acima concluímos que m∠DAC = m∠ABC e m∠DAB = m∠ACB.

Portanto, os três triângulos são semelhantes pelo caso AA de semelhança:

$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta DAC \sim \Delta DBA}$$

Podemos deduzir várias relações de proporcionalidade entre os lados. Por exemplo:

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \ (1)$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \ (2)$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow ah = bc \ (3)$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn \ (4)$$

Observamos que seis outras relações podem ser obtidas das três semelhanças acima e que todas elas decorrem das relações (1), (2) e (4).

Ao somarmos as igualdades (1) e (2) obtemos

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a^2$$

Este é um dos mais conhecidos resultados da Geometria Plana:

Teorema de Pitágoras

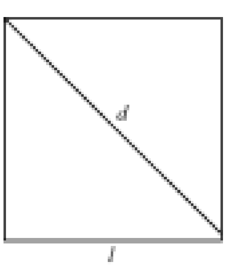
Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Reciprocamente, se temos um triângulo ABC em que a (medida do lado $\overline{BC}$), b (medida de $\overline{AB}$) e c (medida de) $\overline{AC}$ são tais que $a^2 = b^2 + c^2$, então ΔABC é retângulo em A.

Para verificar esse fato, basta construir o triângulo ΔMNP retângulo em M com catetos de medidas b e c. Seja x a medida da hipotenusa NP. Pelo teorema de Pitágoras, $x^2 = b^2 + c^2$ e da igualdade acima devemos ter $x = a$. Logo, os três lados dos triângulos são congruentes e pelo caso LLL de congruência de triângulos concluímos que $\Delta ABC = \Delta MNP$. Logo, os três ângulos são congruentes e, em particular, o ângulo de vértice A é reto, ou seja, o ΔABC é reto em A.

Aplicações:

1) Diagonal do quadrado



O quadrado é um paralelogramo em que a diagonal d de um quadrado de lado l divide-o em dois triângulos retângulos de hipotenusa d e catetos iguais a l.

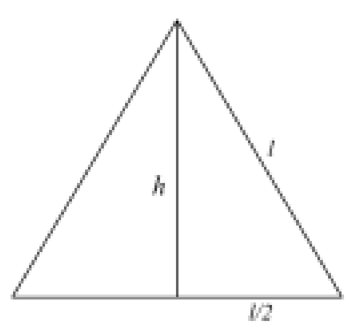
Pelo teorema de Pitágoras, $d^2 = l^2 + l^2$ e, portanto,

$$d = l\sqrt{2}$$

2) Altura do triângulo eqüilátero

A altura h de um triângulo eqüilátero de lado l coincide com a mediatriz do lado, e, como já vimos, divide-o em dois triângulos retângulos congruentes de hipotenusa igual a l e catetos iguais a $l/2$ e h.

Pelo teorema de Pitágoras



$$t^2 = h^2 + (l/2)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}.\ l^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.l$$

Agora faça você

1. Um homem percorre 1 km em direção norte, 2 km em direção leste, 3 km em direção norte e 4 km em direção leste. A que distância o homem está do ponto de partida?

2. Uma escada de 2,6 m de comprimento está apoiada em uma parede à distância de 1,0 m da parede. Qual a altura que a escada atinge na parede?

3. Em um triângulo retângulo um cateto é 7 cm maior que o outro e a hipotenusa mede 13 cm. Determine as medidas dos catetos.

4. Calcule as medidas dos lados de um triângulo retângulo cujo perímetro é 36 cm sabendo que um cateto excede o outro de 3 cm.

5. A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles mede $5\sqrt{2}$ cm. Qual a medida de cada cateto?

6. Determine as medidas da base e da altura de um retângulo sabendo que sua diagonal mede 10 cm e que a sua base excede a altura de 2 cm.

7. Um trapézio isósceles de bases 4 cm e 6 cm tem altura igual a 2 cm. Calcule a medida dos lados congruentes entre si.

8. Calcule os catetos de um triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 25 cm e a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm.

9. Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 cm e 8 cm. Determine as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

10. Dois automóveis partem no mesmo instante de um entroncamento de duas estradas perpendiculares, um em direção ao Norte a 60 km/h e o outro em direção a Oeste a 80 km/h. Qual a distância entre eles após 4 horas de viagem?

11. Qual a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo em que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa é igual a 392 cm?

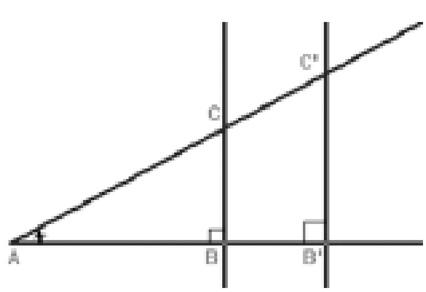
12. Calcule a altura do triângulo isósceles de base 8 cm e com lados congruentes medindo 5 cm.

13. Calcule a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles sabendo que o produto das medidas de seus catetos é igual a 8.

Um pouco de Trigonometria

Considere o ângulo agudo de vértice A na figura a seguir. Podemos construir triângulos BAC e B´AC´retângulos em B e B´, respectivamente, traçando BC e B´C´, ambos perpendiculares a AB.

Os triângulos têm dois ângulos congruentes e são, portanto, semelhantes, pelo caso AA de semelhança de triângulos.



$$\Delta BCA \sim \Delta B'C'A \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'}$$

Dessas relações podemos concluir que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC''},\ \frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} \text{ e } \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$

Isso quer dizer que as razões entre os lados de um triângulo retângulo, chamadas razões trigonométricas, não dependem do tamanho do triângulo, mas sim da medida do ∠BAC, e recebem nomes especiais.

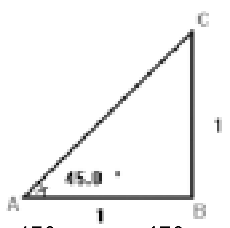
Se denotarmos por α a medida em graus do ângulo agudo BAC, definimos seno, co-seno e tangente do ângulo α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

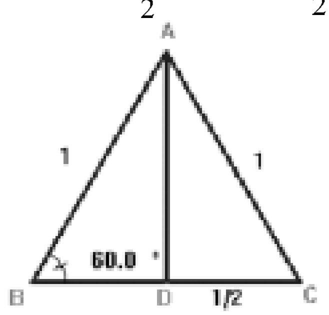
Cálculo das razões trigonométricas de alguns ângulos especiais

1. Seja o ΔABC retângulo em B e tal que a medida do ∠BAC é 45°. Observe que tal triângulo é isósceles. Como já vimos, as medidas dos lados não importam e vamos escolher o triângulo com catetos de medidas $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa mede $\overline{AC} = \sqrt{2}$.



Agora é fácil ver que sen 45° = cos 45° e que tg 45° = 1.

2. Para calcularmos as razões trigonométricas do ângulo de 60°, vamos considerar o triângulo eqüilátero ABC de lado $a = 1$. Já vimos, como conseqüência do teorema de Pitágoras, que sua altura AD tem medida $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. O ΔDBA, retângulo em D, tem hipotenusa de medida $a = 1$ e catetos de medidas $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$. Concluímos que sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, cos 60° = $\frac{1}{2}$ e tg 60° = $\sqrt{3}$.



3. Para determinarmos as razões trigonométricas do ângulo de 30°, basta observarmos, na construção anterior, que o ∠BAD é complementar do ∠ABC e, portanto, mede 30°. O cateto oposto ao ∠BAD mede $\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ e o cateto adjacente a ele mede $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Então, temos: sen 30° = $\frac{1}{2}$, cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resumindo:

α	sen α	cos α	tg α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Os valores da tabela acima serão muito utilizados na resolução de problemas: é muito importante memorizá-los ou recordar das propriedades e dos cálculos que foram desenvolvidos para encontrá-los.

Propriedades das razões trigonométricas

Podemos verificar que valem as propriedades:

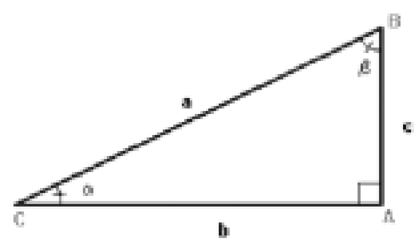
1. Se α e β são ângulos **complementares**, então sen α = cos β e cos α = sen β.
2. Se α é um ângulo agudo de um triângulo retângulo qualquer, então:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

3. Se é é um ângulo agudo de um triângulo retângulo qualquer, então:

$$\boxed{\text{sen}^2\, \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Para tanto, considere o triângulo retângulo da figura



e utilize as relações trigonométricas para escrever sen α, cos α, tg α, etc. em função dos comprimentos *a*, *b* e *c* e, depois, verificar as propriedades **1**, **2** e **3**.

Agora faça você

1. Quais são os ângulos agudos de um triângulo retângulo em que o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos?

2. Um observador vê um edifício construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Se ele se afastar do edifício mais 30 metros, passará a vê-lo sob o ângulo de 45°. Calcular a altura do edifício.

3. Os lados AB e AC de um triângulo ABC medem respectivamente *a* e 2*a*, sendo 45° o ângulo formado por eles. Calcular a medida da altura BD e o lado BC do triângulo em função de *a*.

4. (FAUUSP-67) As bases de um trapézio retângulo são *b* e *2b* e um dos ângulos mede 60°. Calcular a altura.

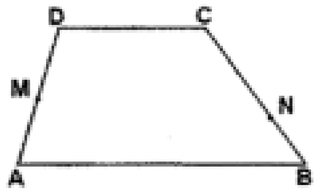
5. Um dos ângulos agudos de um trapézio isósceles mede 60°. Sendo os lados não paralelos congruentes à base menor do trapézio e *m* a medida da base menor, determine o perímetro do trapézio em função de *m*.

6. A base maior de um trapézio isósceles mede 100 cm e a base menor 60 cm. Sendo 60° a medida de cada um de seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

7. Determine tg α sabendo que E é ponto médio do lado BC do quadrado ABCD.

FUVEST – GEOMETRIA PLANA

2003 – No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado AD; N está sobre o lado BC e 2BN = NC. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que DC = 10. Calcule AB.



2003 – No segmento $\overline{AC}$, toma-se um ponto B de forma que $\frac{AB}{AC} = 2\frac{BC}{AB}$. Então, o valor de $\frac{BC}{AB}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\sqrt{5}-1$ d) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$

2002 – Um banco de altura regulável, cujo assento tem forma retangular e de comprimento 40 cm, apóia-se sobre duas barras iguais, de comprimento 60 cm (ver figura 1). Cada barra tem três furos e o ajuste da altura do banco é feito colocando-se o parafuso nos primeiros, nos segundos ou nos terceiros furos das barras (ver visão lateral do banco, na figura 2).

A menor altura que pode ser obtida é:

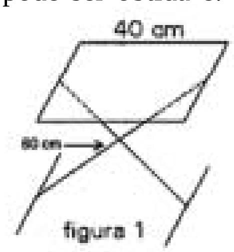
a) 36 cm

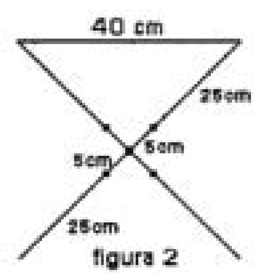
b) 38 cm

c) 40 cm

d) 42 cm

e) 44 cm

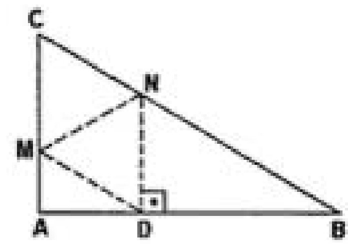




2002 – O triângulo retângulo ABC, cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincida com o ponto D do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra e sabendo que $\angle NDB$ é reto, determine:

a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e $\overline{CM}$;

b) a área do triângulo CMN.



Bibliografia

Dolce, O., Pompeo, J. N. , *Geometria Plana*, Col. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9., Ed. Atual, 1998.

Downs, F. L. Jr, Moise, E. E., Geometria Moderna, Vol I, Ed. Edgard Blücher, 1971.

Rich, B. Teoria e Problemas de Geometria, 3ª Ed., Col. Schaum, Bookman, 2003.

Sobre as autoras

Cláudia Cueva Candido

Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), onde fez seu doutorado na área de Geometria Diferencial. Atualmente é membro da diretoria do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (CAEM) do IME-USP.

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

É docente aposentada do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, onde fez graduação, mestrado e doutorado. É docente dos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade de Mogi das Cruzes (UMC) e do Centro Universitário FIEO (UNIFIEO) e conferencista convidada do curso de Especialização em História da Matemática do Centro de Extensão Universitária.