Matemática

Geometria Analítica

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Martha S. Monteiro

Elaboradora
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

6
módulo

Nome do Aluno ______________________________

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Governador: *Geraldo Alckmin*

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

Secretário: *Gabriel Benedito Issac Chalita*

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP

Coordenadora: *Sonia Maria Silva*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: *Adolpho José Melfi*

Pró-Reitora de Graduação

Sonia Teresinha de Sousa Penin

Pró-Reitor de Cultura e Extensão Universitária

Adilson Avansi Abreu

FUNDAÇÃO DE APOIO À FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FAFE

Presidente do Conselho Curador: *Selma Garrido Pimenta*

Diretoria Administrativa: *Anna Maria Pessoa de Carvalho*

Diretoria Financeira: *Sílvia Luzia Frateschi Trivelato*

PROGRAMA PRÓ-UNIVERSITÁRIO

Coordenadora Geral: *Eleny Mitrulis*

Vice-coordenadora Geral: *Sonia Maria Vanzella Castellar*

Coordenadora Pedagógica: *Helena Coharik Chamlian*

Coordenadores de Área

Biologia:

Paulo Takeo Sano – Lyria Mori

Física:

Maurício Pietrocola – Nobuko Ueta

Geografia:

Sonia Maria Vanzella Castellar – Elvio Rodrigues Martins

História:

Kátia Maria Abud – Raquel Glezer

Língua Inglesa:

Anna Maria Carmagnani – Walkyria Monte Mór

Língua Portuguesa:

Maria Lúcia Victório de Oliveira Andrade – Neide Luzia de Rezende – Valdir Heitor Barzotto

Matemática:

Antônio Carlos Brolezzi – Elvia Mureb Sallum – Martha S. Monteiro

Química:

Maria Eunice Ribeiro Marcondes – Marcelo Giordan

Produção Editorial

Dreampix Comunicação

Revisão, diagramação, capa e projeto gráfico: *André Jun Nishizawa, Eduardo Higa Sokei, José Muniz Jr.*
Mariana Pimenta Coan, Mario Guimarães Mucida e *Wagner Shimabukuro*

Cartas ao Aluno

Carta da *Pró-Reitoria de Graduação*

Caro aluno,

Com muita alegria, a Universidade de São Paulo, por meio de seus estudantes e de seus professores, participa dessa parceria com a Secretaria de Estado da Educação, oferecendo a você o que temos de melhor: conhecimento.

Conhecimento é a chave para o desenvolvimento das pessoas e das nações e freqüentar o ensino superior é a maneira mais efetiva de ampliar conhecimentos de forma sistemática e de se preparar para uma profissão.

Ingressar numa universidade de reconhecida qualidade e gratuita é o desejo de tantos jovens como você. Por isso, a USP, assim como outras universidades públicas, possui um vestibular tão concorrido. Para enfrentar tal concorrência, muitos alunos do ensino médio, inclusive os que estudam em escolas particulares de reconhecida qualidade, fazem cursinhos preparatórios, em geral de alto custo e inacessíveis à maioria dos alunos da escola pública.

O presente programa oferece a você a possibilidade de se preparar para enfrentar com melhores condições um vestibular, retomando aspectos fundamentais da programação do ensino médio. Espera-se, também, que essa revisão, orientada por objetivos educacionais, o auxilie a perceber com clareza o desenvolvimento pessoal que adquiriu ao longo da educação básica. Tomar posse da própria formação certamente lhe dará a segurança necessária para enfrentar qualquer situação de vida e de trabalho.

Enfrente com garra esse programa. Os próximos meses, até os exames em novembro, exigirão de sua parte muita disciplina e estudo diário. Os monitores e os professores da USP, em parceria com os professores de sua escola, estão se dedicando muito para ajudá-lo nessa travessia.

Em nome da comunidade USP, desejo-lhe, meu caro aluno, disposição e vigor para o presente desafio.

Sonia Teresinha de Sousa Penin.

Pró-Reitora de Graduação.

Carta da
Secretaria de Estado da Educação

Caro aluno,

Com a efetiva expansão e a crescente melhoria do ensino médio estadual, os desafios vivenciados por todos os jovens matriculados nas escolas da rede estadual de ensino, no momento de ingressar nas universidades públicas, vêm se inserindo, ao longo dos anos, num contexto aparentemente contraditório.

Se de um lado nota-se um gradual aumento no percentual dos jovens aprovados nos exames vestibulares da Fuvest — o que, indubitavelmente, comprova a qualidade dos estudos públicos oferecidos —, de outro mostra quão desiguais têm sido as condições apresentadas pelos alunos ao concluírem a última etapa da educação básica.

Diante dessa realidade, e com o objetivo de assegurar a esses alunos o patamar de formação básica necessário ao restabelecimento da igualdade de direitos demandados pela continuidade de estudos em nível superior, a Secretaria de Estado da Educação assumiu, em 2004, o compromisso de abrir, no programa denominado Pró-Universitário, 5.000 vagas para alunos matriculados na terceira série do curso regular do ensino médio. É uma proposta de trabalho que busca ampliar e diversificar as oportunidades de aprendizagem de novos conhecimentos e conteúdos de modo a instrumentalizar o aluno para uma efetiva inserção no mundo acadêmico. Tal proposta pedagógica buscará contemplar as diferentes disciplinas do currículo do ensino médio mediante material didático especialmente construído para esse fim.

O Programa não só quer encorajar você, aluno da escola pública, a participar do exame seletivo de ingresso no ensino público superior, como espera se constituir em um efetivo canal interativo entre a escola de ensino médio e a universidade. Num processo de contribuições mútuas, rico e diversificado em subsídios, essa parceria poderá, no caso da estadual paulista, contribuir para o aperfeiçoamento de seu currículo, organização e formação de docentes.

Prof. Sonia Maria Silva

Coordenadora da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Apresentação da área

[...] a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós. […] Assim é necessário colocar a ênfase:

— em procurar soluções e não apenas em memorizar procedimentos;
— em explorar modelos e não apenas em memorizar fórmulas;
— em formular conjecturas e não apenas em fazer exercícios.

[...] com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.

Schoenfeld (1992)[1]

Este curso de Matemática com duração de 4 meses está sendo oferecido a alunos do último ano do ensino médio da rede pública como um incentivo para continuarem seus estudos em direção ao ensino superior. Embora não cubra todo o programa do ensino médio, pretende-se estimular o interesse dos alunos pelos diversos temas de Matemática por meio de abordagens variadas.

Serão estudados tópicos sobre Números, Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Sistemas Lineares e Funções, privilegiando o entendimento das possíveis facetas de um mesmo assunto, a análise de resultados obtidos e a interligação entre os diversos conteúdos.

Escolhas foram feitas de modo a priorizar sua formação, a discussão de idéias e a percepção de que a Matemática é uma disciplina viva que pode ser construída, e não um amontoado de fórmulas prontas para serem decoradas e usadas. Lembrando que realmente aprendemos quando trabalhamos o conhecimento, analisando-o de várias maneiras e usando-o com critério, consideraremos, sempre que possível, aplicações em problemas reais e interdisciplinares.

Acreditando que o intercâmbio entre vocês, alunos do ensino médio, e os alunos da USP, que serão os seus professores, venha a aumentar a sua predisposição para o ensino superior, desejamos a todos **bons estudos**!

Coordenação da área de Matemática

[1]SCHOENFELD A. H. “Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics”. In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematicas teaching and learning*. p. 334-370. Nova Iorque: MacMillan, 1992.

Apresentação do módulo

Em 1637, o matemático e filósofo francês Renée Descartes publicou seu grande trabalho *O Discurso sobre o Método*, em que são estabelecidas as bases filosóficas de seu método para o estudo das ciências, o chamado método cartesiano, até hoje presente na organização do conhecimento em muitas áreas. No apêndice, Descartes ilustra o seu método apresentando a “Géométrie”, que foi o passo inicial no estabelecimento de relações mais estreitas entre a Álgebra e a Geometria. O trabalho contém uma teoria para equações algébricas associadas a curvas planas – por exemplo, equações de segundo grau associadas a parábolas.

Alguns anos mais tarde, um outro matemático francês, Pierre Fermat, publicou um trabalho onde também relacionou equações a retas, às curvas que chamamos cônicas e a outras curvas até então pouco conhecidas. Tem-se registros de que as idéias iniciais de Fermat sobre a Geometria Analítica são, na verdade, anteriores ao trabalho de Descartes, mas esses registros só foram encontrados e publicados em 1769, após a sua morte.

A Geometria Analítica, trata, portanto, desde a sua origem, das relações entre as equações algébricas e os objetos geométricos, buscando a simplificação técnica dos problemas geométricos e a interpretação geométrica dos resultados obtidos nos cálculos algébricos. Os cálculos e a descrição dos objetos geométricos ficam mais simples com os recursos algébricos da teoria das matrizes associados aos processos de resolução de equações.

A nomenclatura da Geometria Analítica (coordenadas, abscissas, ordenadas, etc.) foi introduzida por Leibniz, que se inspirou na terminologia adotada pelos gregos em seus cálculos geométricos. As bases da Geometria Analítica estão, portanto, contidas nos trabalhos desses três grandes matemáticos - Descartes, Fermat e Leibniz - e foram posteriormente adotadas por Euler ao formalizar o conceito de função.

As técnicas da Geometria Analítica desempenham um papel fundamental ainda hoje, por exemplo, no desenvolvimento da Computação Gráfica. As telas dos nossos computadores são modelos da estrutura do plano cartesiano com um número finito de pontos, que é sempre mencionado quando escolhemos a configuração da tela. Aumentando o número de pontos, melhoramos a qualidade da imagem do monitor ou da impressão dessa imagem. Nas muitas utilizações de recursos de imagens, como na tomografia ou na localização por satélite, essa organização é fundamental para uma interpretação precisa dos resultados obtidos.

Este módulo será dedicado ao estudo das técnicas básicas da Geometria Analítica, passando pelas equações das curvas elementares e destacando algumas de suas aplicações.

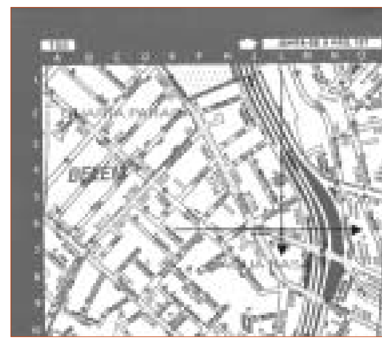
Unidade 1

Retas e sistemas lineares

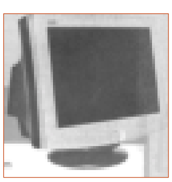
Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Martha S. Monteiro
Elaboradora
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Sistemas de coordenadas cartesianas

Ao pesquisarmos, em um guia de informações sobre a cidade, a referência para a Rua Tapati, encontramos 155-D06. Quando vamos ao mapa 155, em sua margem estão as seqüências: A, B, C, D... na horizontal e 1, 2, 3... na vertical, que nos permitem localizar facilmente a rua Tapati no cruzamento das duas direções indicadas pelas setas na figura.

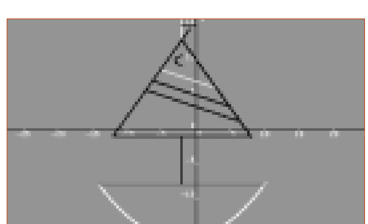


(Fonte: Guia MAPOGRAF)

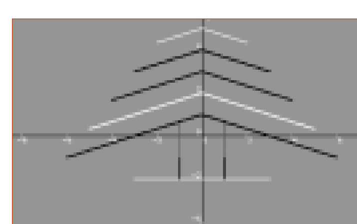


Nos anúncios de equipamentos de informática, encontramos, para os monitores de vídeo, informações do tipo: resolução máxima de 1280 x 1024, 1600 x 1200, etc., dependendo do modelo e do tamanho. Para as impressoras, temos, por exemplo: resolução padrão 1200 x 600, resolução fotográfica 4800 x 1200 etc., dependendo da finalidade a que se destina. Em ambos os casos, o importante é o número de pontos em cada uma das dimensões da tela ou da página a ser impressa.

Nas telas do computador e da televisão, vemos incríveis imagens produzidas com os mais diversos recursos de computação gráfica. Exemplos muito simples dessas imagens podem ser criados com a utilização de programas que nos possibilitam estudar gráficos de funções (no módulo 4, vimos alguns exemplos produzidos pelo programa Winplot). Com o auxílio de um outro programa do mesmo tipo – o Graphmat, por exemplo – obtivemos as figuras abaixo, utilizando representações de segmentos de reta;

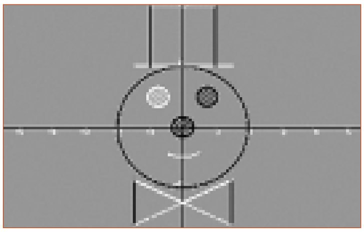


Barquinho



Pinheiro

ou de circunferências, elipses, etc.

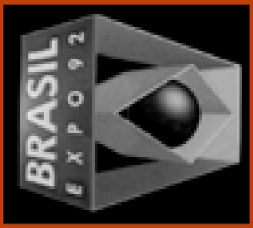


Palhaço

Elipse

Trabalhando com recursos mais avançados, pode-se produzir resultados muito bons e bem conhecidos:

Com o auxílio da computação gráfica podemos produzir interessantes efeitos para a representação plana de figuras tridimensionais.



Em todas essa situações, o que temos em comum é a utilização de uma organização para pontos de um plano que nos permite identificar a posição da rua no mapa, o ponto a ser iluminado na tela ou impresso na página, marcar os pontos que pertencem ao gráfico de uma função, dimensionar os resultados obtidos num exame médico de diagnóstico por imagem etc.

Os *sistemas de coordenadas no plano*, já utilizados no módulo 4, partem do fato de que toda reta admite um sistema de coordenadas; ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os *pontos* de uma reta "geométrica" e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que serão as respectivas *coordenadas*.

O ponto correspondente ao número real zero divide a reta em duas semi-retas, e temos naturalmente definida uma orientação na reta. A distância d (P, Q) entre dois pontos (que é também o comprimento do segmento $\overline{PQ}$) é dada pelo valor absoluto da diferença entre os números reais correspondentes a esses pontos, isto é:

$$\boxed{\mathrm{d}\,(P, Q) = PQ = |x - y|}$$

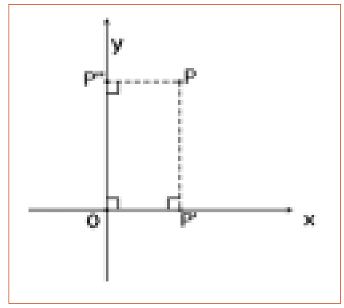
Dado um segmento $\overline{AB}$ em uma reta r tais que as coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, a e b $(a < b)$, o ponto médio de $\overline{AB}$ será o ponto M cuja coordenada m verifica:

logo, temos:

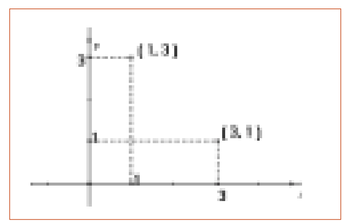
$b - m = m - a,$ ou $a + b = 2m,$

ou ainda, $$\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

Um sistema de coordenadas cartesianas no plano será fixado quando escolhermos um ponto O nesse plano e por esse ponto O tomarmos duas retas orientadas perpendicularmente, como na figura a seguir.

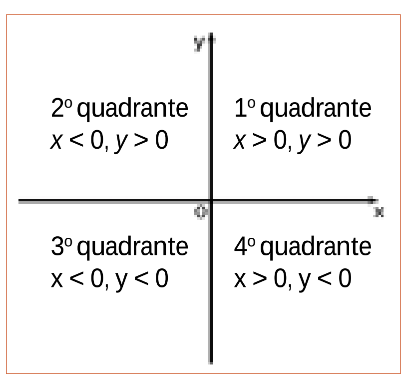


O ponto O é chamado de *origem* do sistema de coordenadas e as duas retas são os *eixos coordenados* (denotados O_x e O_y, como na figura acima). Fixado um sistema de coordenadas, a cada ponto P do plano será associado a um par ordenado de números reais (x, y), que são as coordenadas de P em relação a esse sistema. É importante observar a ordem, pois os pares (1, 3) e (3, 1) são diferentes e representam pontos distintos do plano cartesiano:

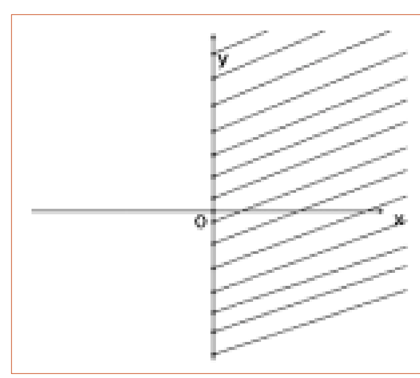


A coordenada x, chamada *abscissa* de P, é a coordenada de sua projeção ortogonal P' no eixo O_x. A chamada *ordenada* de P (sua coordenada y) é obtida como a coordenada de sua projeção ortogonal P'' no eixo O_y. Fica estabelecida, desta forma, uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais.

O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais é representado por $\mathbb{R}^2$.



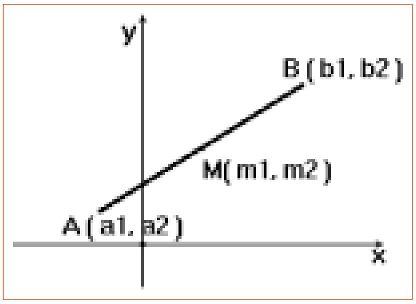
Quadrantes

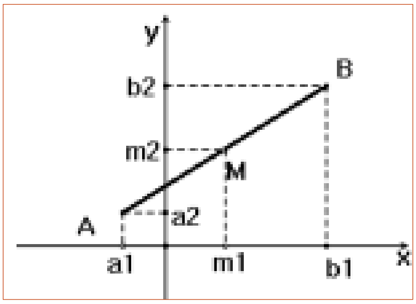


Semiplano: $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Os eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*. Os pontos do primeiro quadrante são pontos cujas coordenadas são ambas positivas; os do terceiro, há pontos cujas coordenadas são ambas negativas. No segundo quadrante, temos pontos cuja primeira coordenada é negativa e a segunda é positiva, o contrário ocorrendo para os pontos do quarto quadrante.

Temos também como caracterizar os semiplanos cujas origens são os eixos coordenados: correspondem aos conjuntos de pontos do plano em que uma das coordenadas tem sempre o mesmo sinal.





O ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ terá como coordenadas aquelas dos pontos médios de suas projeções nos eixos O_x e O_y, respectivamente; como já vimos acima,

$$\boxed{(m_1, m_2) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)}$$

Agora faça você

1. Represente os pontos cujas coordenadas são: (-2, 3), (1, 4), (3, -5), (-4, -3), identificando o quadrante em que se encontram.

2. Represente os conjuntos:

a) $\{(x, 3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(x, y) \mid y > 3\}$

d) $\{(x, y) \mid x < 1\}$

e) $\{(x, y) \mid y > -3\}$

f) $\{(x, y) \mid x = y\}$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes)

g) $\{(x, y) \mid y = -x\}$ (bissetriz do segundo e quarto quadrantes)

h) $\{(x, x + 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

3. Encontre os valores de k para que o ponto A cujas coordenadas são $(k, 7)$ esteja:

a) no eixo O_y;

b) na bissetriz $y = -x$ dos quadrantes pares;

c) na bissetriz $y = x$ dos quadrantes ímpares;

d) no primeiro quadrante;

e) no segundo quadrante.

4. As coordenadas de um ponto B são $(3, k - 2)$. Encontre os valores de k para os quais o ponto B está:

a) no eixo O_x;

b) no primeiro quadrante;

c) no quarto quadrante;

d) na bissetriz dos quadrantes ímpares.

5. (Fuvest) Se $(m + 2n, m - 4)$ e $(2 - m, 2n)$ representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então m^n é igual a:

a) -2 b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) 1 e) $\frac{1}{2}$

6. Encontre os pontos médios das diagonais do quadrilátero cujos vértices têm as coordenadas: (0, 0), (0, 4), (3, 5) e (3, 1).

7. Se um dos extremos de um segmento tem coordenadas (– 4, 2) e o ponto médio tem coordenadas (3, – 1), encontre as coordenadas do outro extremo do segmento.

8. Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (3, 2)$ dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento $\overline{AC}$ é obtido do segmento $\overline{AB}$ por uma rotação de 60º, no sentido anti-horário, em torno do ponto A. Encontre as coordenadas do ponto C.

9. Se o par (a, b) é solução da equação $2x + 3y = 4$, então $(\alpha + 1, \beta + 1)$ é solução de $2x + 3y = m$. Encontre o valor de m que torna verdadeira esta afirmação.

10. Encontre as coordenadas do ponto P interior ao segmento $\overline{AB}$ tal que $PA = 3PB$.

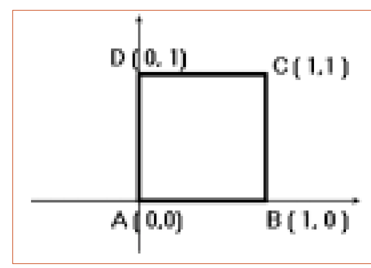
11. Um lado de um paralelogramo tem extremidades nos pontos $A = (– 3, 5)$ e $B = (1, 7)$. Sabendo-se que $P = (1, 1)$ é o ponto médio das diagonais, encontre os outros vértices do paralelogramo.

12. Dois vértices de um quadrado têm coordenadas (2, 1) e (2, 5). Encontre os outros dois vértices. Dê todas as respostas possíveis.

O estudo das matrizes só surgiu no século XIX. As matrizes foram introduzidas em 1850 por James Sylvester, matemático inglês que trabalhou em muitos problemas relacionados aos sistemas lineares. Foram utilizadas sistematicamente como importante auxílio aos cálculos por Cayley, um outro matemático inglês que viveu entre 1821 e1895 ,para o estudo das transformações lineares.

Matrizes e representação de pontos no plano

Um quadrado de lado unitário pode ser representado no plano cartesiano com vértices nos pontos $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ e $D = (0, 1)$.



Podemos representar esses pontos como colunas de uma matriz 2x4, que é uma tabela com duas linhas e quatro colunas, na forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes do mesmo tipo podem ser somadas (somando posição a posição) e podemos multiplicar uma matriz por um número real (multiplicando cada um de seus elementos por esse número).

O produto de duas matrizes exige uma condição adicional: dadas duas matrizes A e B, para multiplicar A por B o número de linhas de A deve ser igual ao número de colunas de B. Vejamos um exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz produto é obtida, posição a posição , multiplicando os elementos de cada linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes de cada coluna da segunda matriz, e somando os resultados.

Mais detalhadamente:

- A primeira linha da primeira matriz é [1 2] e a primeira coluna da segunda é $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; o produto da primeira linha pela primeira coluna será: $1 . 0 + 2 . 0 = 0$.

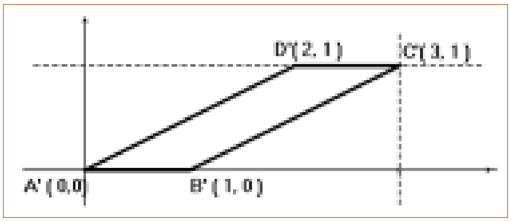
Os produtos da primeira linha de A pelas outras colunas da matriz B, ordenadamente, darão os elementos da primeira linha da matriz produto produto $A \,.\, B$:

- $1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 0 = 1$ (primeira linha, segunda coluna)
- $1 \,.\, 1 + 2 \,.\, 1 = 3$ (primeira linha, terceira a coluna)
- $1 \,.\, 0 + 2 \,.\, 1 = 2$ (primeira linha, quarta coluna)

Da mesma forma, tomando a segunda linha da primeira matriz e multiplicando pelas colunas da segunda teremos a segunda linha da matriz produto:

- $0 \,.\, 1 + 2 \,.\, 0 = 0$
- $0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 0 = 0$
- $0 \,.\, 1 + 1 \,.\, 1 = 1$
- $0 \,.\, 0 + 1 \,.\, 1 = 1$

Se fizermos o gráfico do novo quadrilátero cujas coordenadas dos vértices são dadas pelas colunas da matriz produto, teremos a figura ao lado.



Agora faça você

1. Seja $\boldsymbol{M}$ a matriz acima (que represente os vértices do quadrado unitário), represente graficamente os quadriláteros cujos vértices são as colunas da matriz produto $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B = A \,.\, M}$ onde $\boldsymbol{A}$ é a matriz dada:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

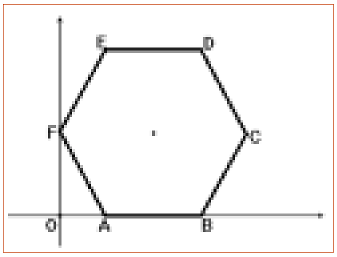
e) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Observe, em cada caso, qual é a relação entre o novo quadrilátero e o quadrado original.

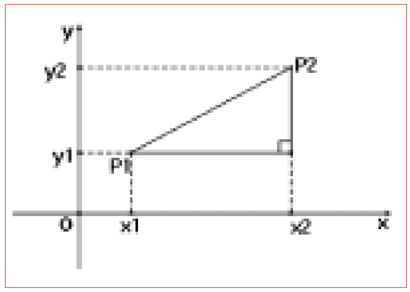
2. Encontre a matriz das coordenadas dos vértices do hexágono da figura ao lado, sabendo que o seu lado tem medida 4.



Calculando distâncias

Para continuar o trabalho com Geometria Analítica precisamos da expressão para a chamada **distância euclidiana entre dois pontos P_1 e P_2**.

Fixado um sistema de ortogonal de coordenadas, sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas dos pontos P_1 e P_2, respectivamente. Indicando por d (P_1, P_2) ou simplesmente P_1P_2 a distância entre P_1 e P_2, o teorema de Pitágoras, nos dá:



$$d(P_1, P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y)^2$$

ou seja,

$$\boxed{d(P_1, P_2) = P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Agora faça você

1. Usando distâncias, mostre que:

a) o triângulo com vértices A, B e C cujas coordenadas são, respectivamente, (– 2, 4), (– 5, 1) e (– 6, 5) é um triângulo isósceles;

b) o triângulo com vértices A, B e C cujas coordenadas são, respectivamente, (3, – 6), (8, 2) e (– 5, – 1) é um triângulo retângulo;

c) o triângulo com vértices A, B e C cujas coordenadas são, respectivamente, (– 4, 0), (0, 6) e (14, 0) é um triângulo obtusângulo (lembre-se das leis dos senos ou dos cossenos).

2. A abscissa de um ponto é – 6 e sua distância ao ponto cujas coordenadas são (1, 3) é $\sqrt{74}$. Encontre a ordenada desse ponto.

3. Determinar os vértices B e C de um triângulo eqüilátero ΔABC, sabendo que o ponto médio do lado $\overline{AB}$ é $(\sqrt{3}, 1)$ e que A é a origem do sistema de coordenadas.

4. Conhecidas as coordenadas (– 4, 3) e (0, 0) de dois dos vértices de um triângulo equilátero, encontre as coordenadas do terceiro vértice.

5. (Fuvest) Os vértices de um triângulo ΔABC, no plano cartesiano, são $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ e $C = (0, \sqrt{3})$. Então o ângulo $\angle BAC$ mede:

a) 60º b) 45º c) 30º d) 18º e) 15º

6. Se um ponto P cujas coordenadas são (x, y) equidista de $A = (3, 7)$ e $B = (4, 3)$, qual é a relação existente entre x e y?

7. Seja Q um ponto do terceiro quadrante cujas coordenadas são $(-1, a)$. Encontre o valor de a para que a distância do ponto $P = (a, 1)$ ao ponto Q seja 2.

8. Se o ponto $P = (x, y)$ é equidistante dos pontos $O = (0, 0)$, $M = (7, -7)$ e $N = (8, 0)$, calcule $x^2 + y^2$.

9. O ponto $P = (m, 2m)$ é equidistante de $A = (3, 0)$ e $B = (-7, 0)$. Calcule m.

10. Calcule a área do quadrilátero da figura 1:

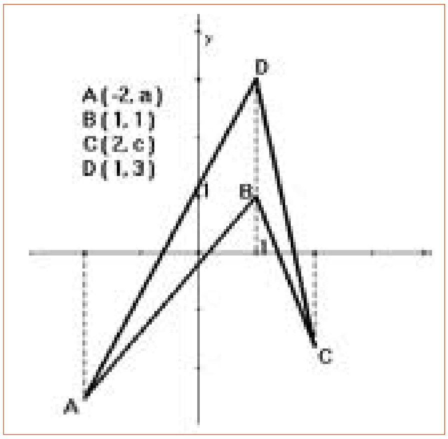


Figura 1

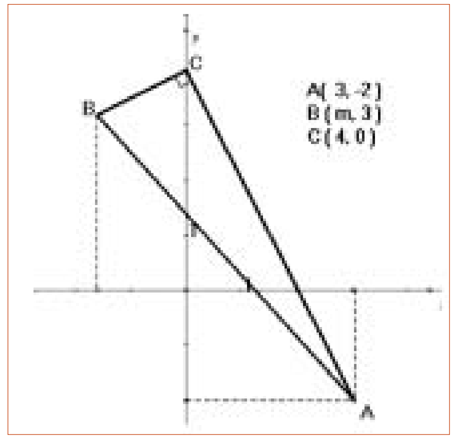
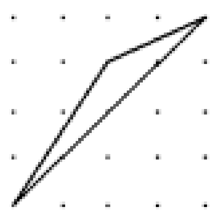


Figura 2

11. Sabendo que o triângulo ΔABC da figura 2 é retângulo, com o ângulo reto no vértice *C*, encontre o valor de m.

12. (Fuvest) Considere o retângulo representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1 cm. A área do triângulo, em cm^2 é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

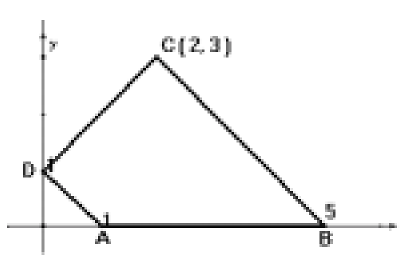


13. Sabendo que o ponto $P = (x, y)$ está mais próximo do ponto $A = (1, 0)$ do que do eixo das ordenadas, encontre a inequação que relaciona x e y.

14. (Fuvest 2004) Duas irmãs receberam como herança um terreno na forma de um quadrilátero *ABCD*, representado abaixo em um sistema de coordenadas. Elas pretendem dividi-lo construindo uma cerca perpendicular ao lado $\overline{AB}$ passando pelo ponto P = $(a, 0)$.

O valor de a para que se obtenham dois lotes de uma mesma área é:

a) $\sqrt{5} - 1$
b) $5 - 2\sqrt{2}$
c) $5 - 2\sqrt{2}$
d) $2 + \sqrt{5}$
e) $5 + 2\sqrt{2}$



15. (Fuvest) Sejam a, b e c três números estritamente positivos em progressão aritmética. Se a área do triângulo *ABC, cujos vértices são* $A = (-a, 0)$, $B = (0, b)$ *e* $C = (c, 0)$, é igual a b, então, o valor de b é:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

ESTUDO GERAL DAS RETAS

Voltando às ilustrações do início da unidade, vamos observar alguns detalhes sobre as funções que utilizamos para desenhá-los. Na primeira figura, temos apenas segmentos de retas, e na segunda alguns segmentos de parábolas. Já sabemos, do módulo 4, que os pontos do gráfico de uma função do tipo

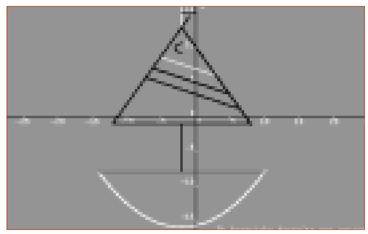
$\boldsymbol{y = ax + b}$ são pontos de uma **reta**

e que se considerarmos uma função

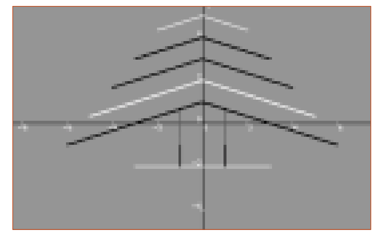
$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

o seu gráfico será uma **parábola**.

Vamos, a seguir, detalhar alguns fatos importantes a respeito das retas no plano que nos dêem novas alternativas de trabalho com essas funções.



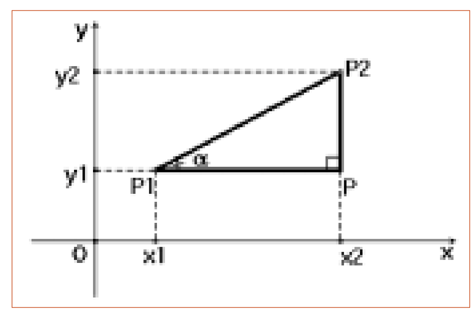
Barquinho



Pinheiro

Coeficiente angular de uma reta

Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 cujas coordenadas são (x_1, y_1) e (x_2, y_2) respectivamente, usando uma das relações trigonométricas no triângulo ΔP_1PP_2 da figura acima, temos que a tangente do ângulo a será dada pela expressão:



$$\text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A tangente do ângulo a é utilizada para avaliar a **inclinação** da reta pelos pontos P_1 e P_2 e é chamada o **coeficiente angular** da reta determinada pelos pontos P_1 e P_2.

Se P_1 e P_2 são pontos do plano tais que $y_2 = y_1$ ou seja, pontos que determinam uma reta paralela ao eixo O_x, a inclinação será nula. A inclinação de uma reta paralela ao eixo O_y não está definida.

Um fato importante é:

Retas paralelas têm o mesmo coeficiente angular

Agora faça você

1. Encontre a inclinação do segmento com extremos nos pontos

a) (1, 2) e (3, 8); b) (0, – 3) e (4, 1); c) (4, – 1) e (5, 3); d) (1, 8) e (3, 8).

2. Mostre que os pontos com coordenadas (– 4, – 1), (3, 8/3), (8, – 4), e (2, – 9) são os vértices de um trapézio, comparando as inclinações de seus lados.

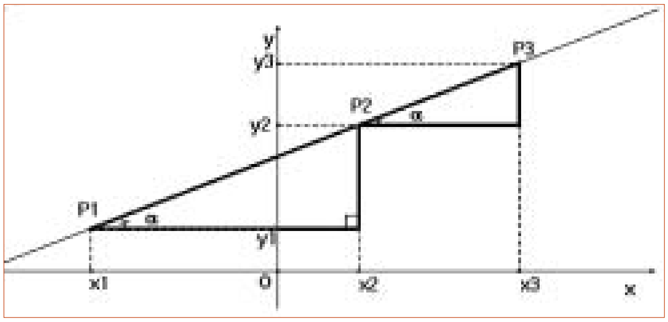
3. Classifique o quadrilátero cujos vértices são: $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$, $C = (1, 7)$ e $D = (0, 4)$, encontrando as inclinações de seus lados.

4. O coeficiente angular da reta que passa por $A = (0, m)$ e $B = (m, 0)$, sendo $m \neq 0$ vale:

a) 1 b) – 1 c) 0 d) m e) $\dfrac{1}{m}$

Condição de alinhamento

Se tivermos três pontos, estes pontos estarão alinhados, isto é, pertencerão à uma mesma reta, se e somente se o coeficiente angular da reta por P_1 e P_2 coincidir com o coeficiente angular da reta por P_2 e P_3, já que essas duas retas devem coincidir.



Temos então:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

Efetuando os produtos em

$$(y_2 - y_1) \,.\, (x_3 - x_2) = (x_2 - x_1) \,.\, (y_3 - y_2)$$

teremos:

$$(x_2\, y_3 - x_3\, y_2) - (x_1\, y_3 - x_3\, y_1) + (x_1\, y_2 - x_2\, y_1) = 0$$

O primeiro membro desta equação é exatamente a expressão obtida quando calculamos o determinante da matriz

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

O cálculo do determinante de uma matriz 3 x 3 pode ser feito da seguinte forma:

1º passo: formamos uma nova matriz (agora 3 x 5) copiando, à direita da matriz dada, as suas duas primeiras colunas; no nosso caso, ficamos com a nova matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 y_1 \quad x_3 y_2 \quad x_1 y_3 \quad x_2 y_3 \quad x_2 y_1 \quad x_1 y_2$$

2º passo: somamos os produtos que estão nas paralelas à chamada diagonal principal da matriz (indicada com a seta laranja). Teremos;

$$x_2 y_3 + x_2 y_1 + x_1\, y_2$$

3º passo: somamos os produtos que estão nas paralelas à chamada diagonal secundária da matriz (indicada com a seta preta). Teremos:

$$x_2 y_1 + x_3\, y_2 + x_1\, y_3$$

4º passo: o **determinante da matriz** é a diferença dos resultados obtidos no 2º e 3º passos, isto é,

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)$$

ou, rearranjando os termos da expressão acima,

$$\boxed{\det M = (x_2 y_3 - x_3 y_2) - (x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

Portanto, a equação que nos dá a **condição de alinhamento** dos pontos P_1 e P_2 e P_3 pode ser escrita na forma:

Os pontos P_1 e P_2 e P_3 cujas coordenadas são, respectivamente, (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, estão alinhados se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Veremos, mais adiante, que o determinante dessa matriz M está também relacionado com a área do triângulo determinado pelos três pontos P_1 e P_2 e P_3.

Agora faça você

1. Determine o valor de k para que os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ sejam paralelos, dados $M = (k, 2)$, $N = (2, 10)$, $P = (3, 1)$ e $Q = (2, 7)$.

2. Encontre os valores de a para que os pontos $A = (a, 2a - 1)$, $B = (a + 1, 2a + 1)$ e $C = (a + 2, 2a + 3)$ sejam colineares.

3. Determinar o ponto $P = (x_0, y_0)$ colinear simultaneamente com os pontos $A = (-1, -2)$ e $B = (2, 1)$ e com $C = (-2, 1)$ e $D = (4, -2)$.

4. Para que valores de k os pontos cujas coordenadas são $A = (2, 3)$, $B = (5, 4)$ e $C = (1, k)$ são vértices de um triângulo?

5. Considere os pontos $A = (2, 2)$, $B = (4, -1)$ e $C = (m, 0)$. Calcule o valor de m para que a soma $AC + CB$ seja mínima.

Equações da reta

Podemos representar graficamente os pontos de uma reta associados ao gráfico de uma função da forma $y = ax + b$, mas também podemos associá-los ao conjunto de soluções de uma equação, como originalmente fizeram Descartes e Fermat. Vamos agora trabalhar nessa direção.

Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, cujas coordenadas são (x_1, y_1) e (x_2, y_2), para encontrarmos uma equação para a reta por esses dois pontos é suficiente observar que um ponto P com coordenadas (x, y) pertence a essa reta se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$$

pois P, P_1 e P_2 estão alinhados. Desenvolvendo o determinante, teremos:

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)\,x + (x_2 - x_1)\,y = 0$$

Chamando $a = y_1 - y_2$, $b = x_2 - x_1$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$, a equação acima fica na forma:

$$\boxed{\boldsymbol{ax + by + c = 0}}$$

que é chamada **equação geral** da reta.

Um ponto P_0 com coordenadas (x_0, y_0) pertence à reta de equação $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ se e somente se temos:

$$ax_0 + by_0 + c = 0$$

Agora faça você

1. Verifique quais pontos abaixo pertencem à reta de equação $3x - 4y + 12 = 0$:

a) $(0, 3)$ b) $(1, 2)$ c) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ d) $(1, 1)$

2. Dada a reta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & x \\ 1 & -3 & y \end{vmatrix} = 0$$

encontre sua equação na forma geral e identifique dois de seus pontos.

Explorando a equação da reta

Vamos retomar a equação

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0},$$

onde

$$a = y_1 - y_2, \quad b = x_2 - x_1 \quad \text{e} \quad c = x_1y_2 - x_2y_1,$$

(x_1, y_1) e (x_2, y_2) coordenadas dos pontos P e Q. Os pontos P e Q são distintos, o que garante que os coeficientes a e b não sejam ambos nulos, ou seja, pelo menos um deles é diferente de zero. Note que esses pontos pertencem à reta. (Verifique!)

É importante observar que:

- se $a = 0$ a equação da reta fica: $by + c = 0$ ou $y = -\frac{c}{b}$ e temos uma **reta paralela ao eixo O_x** (por quê?);
- se $b = 0$ a equação da reta fica: $ax + c = 0$ ou $x = -\frac{c}{a}$ e temos uma **reta paralela ao eixo O_y** (por quê?);
- quando $b \neq 0$, podemos reescrever a equação da reta na forma:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + q$$

O coeficiente $-\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ é exatamente o **coeficiente angular** da reta, já definido anteriormente. Por outro lado, se fizermos $x = 0$ na equação da reta, teremos $y = -\frac{c}{b}$ **ou seja**, **o ponto** $(0, -\frac{c}{b})$ é o ponto em que a reta corta o eixo O_y.

O chamado **coeficiente linear** da reta é o valor $q = -\dfrac{c}{b}$ que correspondente à ordenada da intersecção da reta com o eixo O_y.

Com essas notações, a equação da reta pode ser também escrita como:

$$y = mx + q$$

sendo esta última equação a chamada equação reduzida da reta, que coincide com a função polinomial de grau um já estudada no módulo 4.

Agora faça você

1. Encontre o valor de k para o qual a reta $3x + ky - 6 = 0$:

a) seja paralela ao eixo O_y;

b) tenha inclinação igual a 2.

2. Encontre o valor de k para o qual a reta $kx + 3y - 2 = 0$

a) seja paralela ao eixo O_x;

b) tenha inclinação igual a -1;

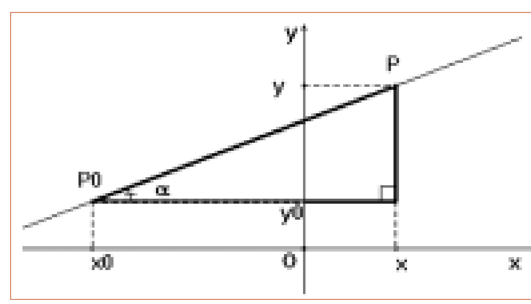
c) corte o eixo O_x no ponto (5, 0).

3. O coeficiente angular da reta $(k + 1)x - 2y + 3 = 0$ vale -2. Determine k.

4. (Fuvest) Duas retas s e t do plano cartesiano se interceptam no ponto (2, 2). O produto de seus coeficientes angulares é 1 e a reta s intercepta o eixo y no ponto (0, 3). A área do triângulo determinado pelo eixo x e as retas s e t é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Podemos também escrever a equação da reta conhecendo um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ pelo qual ela passa e o seu coeficiente angular m = tg a.



Observando a figura ao lado, podemos escrever, para um ponto $P = (x, y)$ genérico, pertencente à reta,

$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

que nos dá:

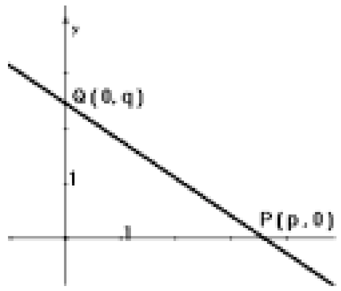
$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

ou

$$\boxed{y = m\,(x - x_0) + y_0}$$

Agora faça você

Dados os pontos P e Q cujas coordenadas são $(p, 0)$ e $(0, q)$, respectivamente, $p \neq 0$, $q \neq 0$, encontre a equação da reta por P e Q.



Observe que a equação que você encontrou pode ser escrita na forma

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

que é chamada a **equação segmentária** da reta $\overleftrightarrow{PQ}$

Resumindo

Dados dois pontos P_1 e P_2, cujas coordenadas são (x_1, y_1) e (x_2, y_2) a equação da reta por P_1 e P_2 pode ser encontrada através do cálculo do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = 0$$

que conduz a uma equação na forma geral:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

O **coeficiente angular** da reta é dado por: $m = tg\ \alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e, como no caso do gráfico da função

$$\boldsymbol{y = mx + q}$$

temos também o **coeficiente linear** q (o gráfico corta o eixo O_y em $(0, q)$).

Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e o coeficiente angular m , podemos escrever a equação também na forma:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

A equação na **forma segmentária**:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

é obtida a partir das coordenadas p e q dos pontos de intersecção com os eixos O_x e O_y, respectivamente.

Agora faça você

1. Dado o ponto $A = (1, 2)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q situados, respectivamente, sobre as retas de equação $y = x$ e $y = 4x$ de tal modo que A seja o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

2. Os pontos de coordenadas $(a, 1)$ e $(2, b)$ estão sobre a reta $x + 2y = 0$. Calcule a distância entre eles.

3. Na figura 1, $A = (2, 3)$, $C = (3, 1)$ e $BC = \sqrt{10}$. Encontre a equação da reta por A e B.

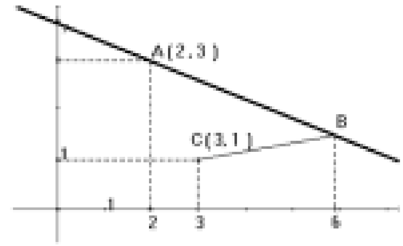


Figura 1

4. Na figura 2, $M = (a, a)$ é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, $A = (2, 6)$, $B = (0, a)$ e $C = (c, 0)$. Encontre a equação da reta por B e C.

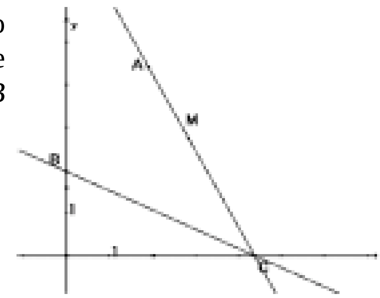


Figura 2

5. Na figura 3, $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado 4.

a) Encontre a equação da reta que contém o lado $\overline{AF}$

b) Mostre que as retas $\overleftrightarrow{FE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas.

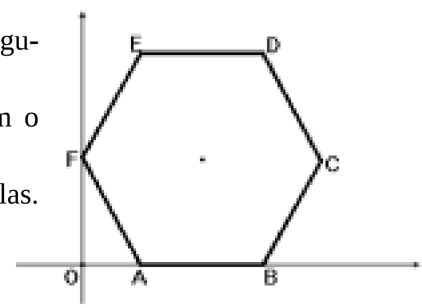
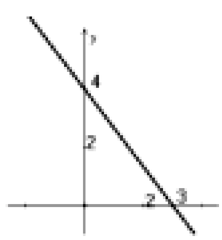
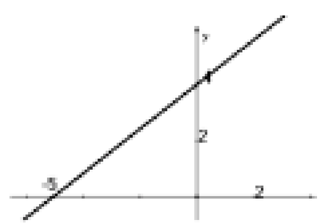


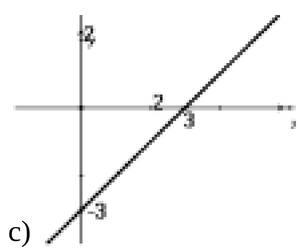
Figura 3

6. Se uma reta tem equação geral $3x - y + 3 = 0$, encontre sua equação segmentária.

7. Escreva a equação segmentária de cada uma das retas abaixo:

a) 

b) 

c) 

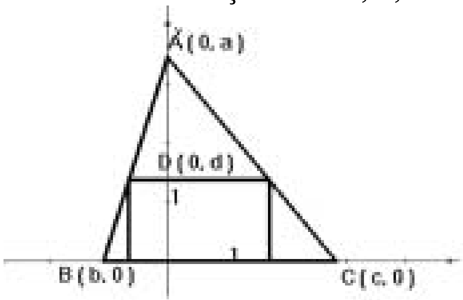
8. A reta $x + y - k = 0$ corta o eixo das coordenadas nos pontos A e B. Determine k para que o triângulo ΔOAB tenha área igual a 25 unidades.

9. Seja $B \neq (0, 0)$ o ponto da reta de equação $y = 2x$ cuja distância ao ponto $A = (1, 1)$ é igual à distância de A à origem. Encontre a abscissa de B.

10. Uma reta r determina, no primeiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo isósceles cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta intercepta os eixos cooordenados. Se a área do triângulo é 18, encontre a equação da reta r.

11. Seja r a reta que passa pelos pontos cujas coordenadas são (2, 3) e (5, 0). Determinar a equação da reta s, simétrica a r em relação à reta de equação $x = 5$.

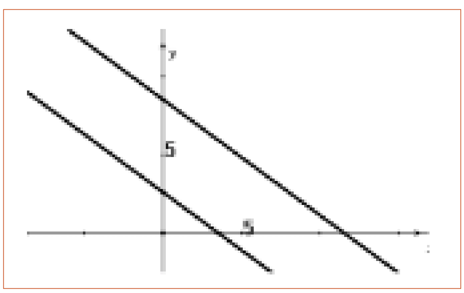
12. O retângulo *PQRS* da figura abaixo é o retângulo de área máxima inscrito no triângulo ΔABC. Encontre a relação entre *a*, *b*, *c* e *d*.



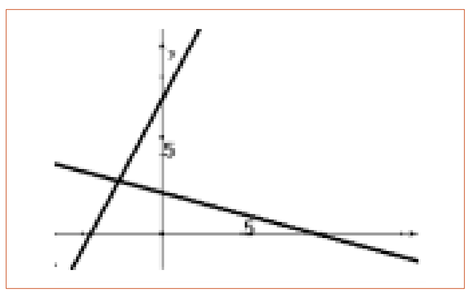
POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas equações gerais $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ e $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ representam **uma mesma reta** se e somente se seus coeficientes são proporcionais, isto é, existe um número real k tal que $a_1 = k a_2$, $b_1 = k b_2$ e $c_1 = k c_2$. Neste caso, podemos verificar que todo ponto de uma das retas pertence também à outra reta e vice-versa. Diremos que as retas, neste caso, serão **coincidentes.** Os coeficientes angulares dessas retas são **iguais**, assim como os **coeficientes lineares**.

Duas retas distintas do plano podem ser **paralelas** ou **concorrentes.**



retas paralelas



retas concorrentes

Podemos distinguir as retas paralelas das retas concorrentes **comparando seus coeficientes angulares**:

- se os **coeficientes angulares** de duas retas distintas são **iguais**, então essas retas são **paralelas**;
- se os **coeficientes angulares** de duas retas distintas são **diferentes**, então essas retas são **concorrentes**.

Através do teorema de Pitágoras podemos verificar que duas retas concorrentes são **perpendiculares** se e somente se seus coeficientes angulares m_1 e m_2 são tais que

$$m_1 \,.\, m_2 = -1 \text{ ou } m_2 = -\frac{1}{m_1}, \text{ se } m_1 \neq 0.$$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS E SISTEMAS LINEARES

As coordenadas do **ponto comum** a duas retas concorrentes podem ser obtidas resolvendo o **sistema linear de duas equações e duas incógnitas (*S*)** formado por equações das duas retas, pois as coordenadas do ponto procurado devem satisfazer simultaneamente as duas equações.

$$(S) \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemas lineares e determinantes – um pouco de história

Nos trabalhos de Leibniz, por volta de 1678, temos o processo de resolução de equações lineares eliminando incógnitas e identificando o que, mais tarde, seria o determinante. O mesmo processo foi aperfeiçoado por Maclaurin para sistemas com três ou quatro incógnitas. Uma regra bem conhecida para a resolução de sistemas utilizando determinantes é a chamada regra de Cramer (1704-1752); outros desenvolvimentos para o seu cálculo foram estabelecidos por Sarrus e Laplace (1772), e a teoria dos determinantes teve a sua organização e principais propriedades estabelecidas por Vandermond, em 1776.

Dois sistemas de equações serão chamados **equivalentes** se têm o mesmo conjunto solução.

Duas observações importantes justificam as técnicas que utilizamos para resolver os sistemas de equações:

1. Quando multiplicamos uma equação em um sistema por um número não nulo, obtemos uma outra equação que é equivalente à primeira, ou seja, temos duas equações com as mesmas soluções.
2. Uma das equações do sistema pode ser trocada pela soma ou diferença desta com um múltiplo de outra equação do mesmo sistema, e, nesta troca, temos um novo sistema equivalente ao sistema original.

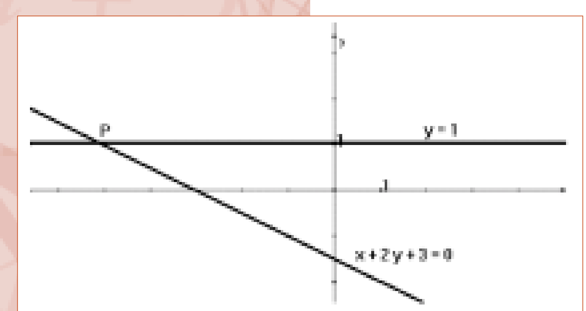
Essas observações justificam as estratégias elementares de **eliminação** ou **substituição** que usamos freqüentemente para resolver os sistemas de equações. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

Para encontrar o ponto de intersecção das retas de equações $x + 2y + 3 = 0$ e $y = 1$, precisamos resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas (x e y):

$$\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

As incógnitas representam as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ de intersecção das duas retas que estamos procurando. Da segunda equação sabemos que $y = 1$. Substituindo esse valor de y na primeira equação teremos que:



$x + 2 . 1 + 3 = 0$, ou seja, $x + 5 = 0$, o que nos dá a solução $x = -5$.

A solução (única) do sistema é $(x, y) = (-5, 1)$ e, portanto, o ponto P de intersecção das duas retas tem coordenadas $P = (x, y) = (-5, 1)$.

Esboçando o gráfico das retas dadas, podemos confirmar a solução obtida. Confira na figura ao lado.

Exemplo 2

Encontrar as coordenadas do ponto de intersecção das retas $x + 2y + 3 = 0$ e $x - y = 0$. Temos, agora, que resolver o sistema:

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Neste caso, podemos resolver por substituição (deixamos os cálculos para você) ou podemos trocar o sistema **(*S*)** pelo sistema equivalente **(*S'*)** obtido trocando a segunda equação do sistema **(*S*)** pela diferença entre a primeira e a segunda equação.

$$(S') \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

Podemos agora resolver equação $3y + 3 = 0$ e temos $y = -1$. Substituindo na primeira equação, a solução de $x + 2 . -1 + 3 = 0$ será $x = -1$. O ponto de intersecção das duas retas é $P = (x, y) = (-1, -1)$.

Esboce agora o gráfico das retas para conferir geometricamente a solução obtida.

Exemplo 3

Vamos agora encontrar o ponto de intersecção das retas $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 4y - 1 = 0$.

Para resolver o sistema

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

neste caso vamos trocar o sistema **(*S*)** pelo sistema **(*S'*)**, trocando a primeira equação de **(*S*)** por duas vezes ela mesma.

$$(S')\begin{cases} 2x + 4y + 6 = 0 \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Trocando a segunda equação pela diferença entre as duas equações de **(*S'*)** obtemos

$$(S'')\begin{cases} 2x + 4y + 6 = 0 \\ 0x + 0y + 7 = 0 \end{cases}$$

e, neste caso, chegamos a um absurdo; não podemos encontrar números x e y que tornem possível $0.x + 0.y + 7 = 0$.

Como interpretar esse resultado?

Trata-se de um sistema impossível (isto é, para o qual não existe solução). Geometricamente podemos verificar que as retas descritas pelas equações $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 4y - 1 = 0$ são paralelas (compare as suas inclinações). Logo, não há ponto de intersecção para essas retas.

Exemplo 4

O ponto de intersecção das retas $x + 2y + 3 = 0$ e $2x + 4y + 6 = 0$ pode ser obtido resolvendo o sistema

$$(S)\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema **(*S'*)**, trocando, novamente, a primeira equação de **(*S*)** por duas vezes ela mesma.

$$(S')\begin{cases} 2x + 4y + 6 = 0 \\ 2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

Trocando a segunda equação pela diferença entre as duas equações de **(*S'*)** obtemos

$$(S'')\begin{cases} 2x + 4y + 6 = 0 \\ 0x + 0y + 0 = 0 \end{cases}$$

Como interpretar esse resultado?

As equações originais do sistema são equivalentes, ou seja, representam a mesma reta.

A equação $x + 2y + 3 = 0$ é a equação de uma reta, e, portanto, temos uma infinidade de pares (x, y) que são soluções dessa equação: $(-1, -1)$, $(0, -3/2)$, $(-3, 0)$,$(3, -3)$, $(-7, 4)$ etc., e que também são soluções para a segunda equação(verifique!).

Geometricamente, as suas retas têm pelo menos dois pontos distintos em comum, logo, são retas coincidentes e as soluções são coordenadas de pontos sobre uma mesma reta.

Podemos descrever as soluções obtidas nos exemplos acima de maneira geral, fazendo a análise a seguir.

Para resolver por eliminação, vamos supor que b_1 e b_2 são ambos não nulos (caso contrário, uma das equações já daria o valor procurado de x – como no exemplo 1 acima). Podemos efetuar multiplicações e considerar o sistema equivalente:

$$(S')\begin{cases} b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \\ b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

Para eliminarmos a variável y, subtraímos, por exemplo, a segunda equação da primeira, ficando com o novo sistema:

$$(S'')\begin{cases} b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x + b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

A segunda equação de S'' nos dá o valor procurado de x desde que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Neste caso, $x = -\dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$; voltando à primeira equação podemos encontrar o valor de y.

Se $a_1 b_2 - a_1 a_2 = 0$, o sistema só terá solução se $b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0$, o que elimina a segunda equação em S'' (ela ficará 0 = 0). O sistema S'' terá, na realidade, somente uma equação (as duas equações são equivalentes) e será chamado de indeterminado.

As condições que apareceram nesse processo geral de resolução por eliminação podem ser interpretadas geometricamente:

- a equação $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ é a equação de uma reta com coeficiente angular $\dfrac{a_1}{b_1}$, se $b_1 \neq 0$;
- a equação $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ é a equação de uma reta com coeficiente angular $\dfrac{a_2}{b_2}$, se b_2 ¹ 0;
- as retas **são paralelas ou concorrentes** se $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$, e essa igualdade que equivale à condição $a_1 b_2 - a_1 a_2 = 0$, como conseguimos nos cálculos da resolução por eliminação.

Temos ainda que investigar a condição $b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0$, que também pode ser escrita na forma: $\dfrac{c_1}{b_1} = \dfrac{c_2}{b_2}$.

Se $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$ e $\dfrac{c_1}{b_1} = \dfrac{c_2}{b_2}$ as equações serão equivalentes, ou seja, as retas, neste caso, são coincidentes.

Se $\dfrac{c_1}{b_1} = \dfrac{c_2}{b_2}$, mas $\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}$ o sistema será impossível, e, neste caso, teremos retas paralelas.

Se $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ os coeficientes angulares serão diferentes, as retas serão **concorrentes** e teremos a única solução dada pelos cálculos acima.

Também podemos estudar os sistemas lineares utilizando as matrizes, pois o sistema **(*S*)** é equivalente

$$(S')\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = -\,c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = -\,c_2 \end{cases}$$

pode ser escrito como o produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

A matriz 2 x 2 $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ é chamada a **matriz do sistema linear** enquanto que a matriz 2 x 3 $\boldsymbol{M'} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ é a **matriz completa do sistema linear**.

O determinante de uma matriz quadrada 2 x 2 é definido como a diferença dos produtos dos termos das diagonais. Mais precisamente, dada uma matriz 2 x 2 , como no caso 3 x 3,

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$a_2\, b_1 \qquad\qquad a_1\, b_2$$

$$\boxed{\det M = a_1b_2 - a_2b_1}$$

Note, pelo que vimos anteriormente, que **det *M* ≠ 0** corresponde ao caso em que as retas são concorrentes e o sistema admite uma única solução. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 5

Encontrar o ponto comum as retas de equação: $2x + y - 1 = 0$ e $4x + 2y + 2 = 0$.

Sendo a segunda equação o dobro da primeira, todas as soluções são comuns, e, neste caso, as retas são coincidentes (encontramos $y = -\,2x + 1$ em ambas as equações).

Escrevendo as matrizes para o sistema temos:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 4x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\boldsymbol{M'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. É fácil verificar que **det *M* = 0**. Note também que, em ambas as matrizes ***M*** e ***M'*** as linhas são proporcionais. No caso das retas coincidentes, sempre teremos essa situação.

O sistema é indeterminado, tem infinitas soluções que são os pontos cujas coordenadas são da forma $(x, -\,2x + 1)$, tais como (0, 1), (1, – 1), (– 1, 3), (1/2, 0), etc.

Exemplo 6

Modificando apenas uma das constantes do sistema, vamos estudar um segundo caso. Encontrar o ponto comum às retas de equação: $2x + y - 5 = 0$ e

$4x + 2y + 2 = 0$. A segunda equação não é mais o dobro da primeira; as soluções da primeira equação são tais $2x + y = 5$. Substituindo essa informação na segunda equação, teremos:

$$2\,(2x + y) + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 2.\,5 + 2 = 12 = 0$$

Temos, por tanto, um absurdo, o sistema não admite solução.

Escrevendo as matrizes:

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 4x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{temos } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. É fácil verificar que **det M = 0**, que as linhas de M ainda são proporcionais, mas o mesmo já não ocorre com as linhas de M'.

Neste caso, as retas são **paralelas** (encontre os coeficientes angulares e lineares e confira!), e o sistema é **impossível** (não existe ponto comum às duas retas).

Exemplo 7

Estudemos agora o sistema equivalente a encontrar o ponto comum às retas de equação:

$x + y - 1 = 0$ e $x + 2y + 2 = 0$.

Temos o sistema:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{cuja matriz } M \text{ é } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema por eliminação, obtemos $y = -3$ e $x = 4$, portanto, as retas são **concorrentes** e o ponto comum a ambas é o ponto $(4, -3)$. Neste caso, det $M \neq 0$ e o sistema será chamado **possível, determinado**, pois admite uma única solução.

Resumindo

Dado um sistema de equações:

$$\textbf{(S)} \begin{cases} a_1\, x + b_1\, y + c_1 = 0 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2 = 0 \end{cases}$$

e as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ e } M' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

Se det $M = 0$, o sistema será:

- **possível e indeterminado** – quando as linhas de M' forem proporcionais, as retas serão **coincidentes;**

ou

- **impossível** – caso contrário, e as retas serão **paralelas**.

Se det $M \neq 0$ o sistema será **possível e determinado**, admitindo uma **única** solução e as retas serão concorrentes.

Agora faça você

1. Dentre os pares de reta a seguir, qual deles não é formado por retas perpendiculares ou paralelas?

a) $3x - 5y + 4 = 0$ e $x/3 + y/5 = 1$
b) $2y + x = 7$ e $4x + 2y + 7 = 0$
c) $3x + 4 = 0$ e $5y - 3 = 0$
d) $x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{2}$
e) $(a + 1)\, x + (a - 1)\, y = 0$ e $(a - 1)\, x = (a + 1)\, y$

2. Determinar o ponto Q da reta r de equação $x + y - 2 = 0$, tal que o segmento $\overline{PQ}$ seja perpendicular a r, sendo $P = (2, 6)$.

3. Determinar o ponto simétrico de $(-4, 3)$ em relação a reta $x - y - 1 = 0$.

4. Dois lados de um paralelogramo estão contidos nas retas $y = 2x$ e $2y = x$. Dado o vértice $A = (5, 4)$, determinar B, C e D.

5. Obter os vértices de um losango $ABCD$ tal que:

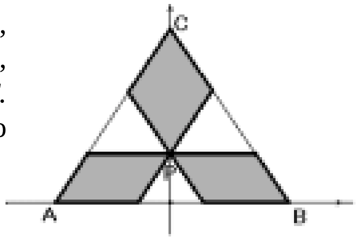
- o vértice A está no eixo O_y;
- o vértice B está no eixo O_x;
- a diagonal $\overline{AC}$ está contida na reta $2x + y - 3 = 0$;
- as diagonais se interceptam em $(x, 1)$.

6. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto de intersecção das retas de equações $x/2 + y/2 = 1$ e $3x + 4y = 0$ e é paralela à reta descrita por $y = x + 2$.

7. Determinar p de modo que as retas de equações $p^2x + py + 2 = 0$ e $3x + (p + 1)y - 7 = 0$ sejam perpendiculares.

8. Encontre a equação de cada reta que é perpendicular à reta $5x - y = 1$ e que forma com os eixos coordenados um triângulo de área igual a 5.

9. (Fuvest) Considere os pontos $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 3)$ e $P = (0, a)$, com $0 < a < 3$. Pelo ponto P, traçamos três retas paralelas aos lados do triângulo ABC.
a) Determine em função de a a área da região sombreada na figura.
b) Para que valor de a a área é máxima?



10. (Fuvest) O sistema $\begin{cases} x + (c + 1)\, y = 0 \\ c\, x + y = -1 \end{cases}$ onde $c \neq 0$ admite uma solução (x, y) com $x = 1$. Então o valor de c é:

a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

11. Encontre os valores de h para que os sistemas sejam possíveis e esboce o gráfico das retas em cada caso:

a) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ -3x + hy = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + hy = 0 \\ 2x + 8y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -2x + 3y = h \end{cases}$

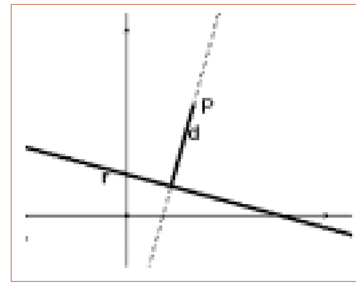
d) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ hx + 6y = -2 \end{cases}$

12. A equação em x e y:

$$(2x + 6y + a)^2 + (x + by - 7)^4 = 0$$

admite infinitas soluções. Encontre os valores de a e b.

Distância de ponto à reta.



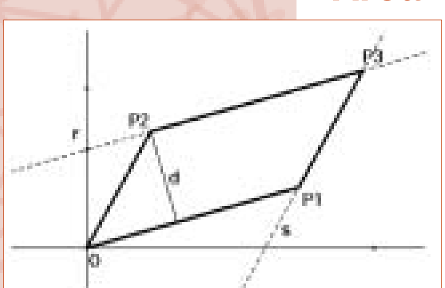
Consideremos uma reta r cuja equação geral é $ax + by + c = 0$ e um ponto cujas coordenadas são (x_0, y_0) não pertencente à ela. Podemos considerar o segmento com extremidade P e perpendicular à reta dada. O comprimento $\boldsymbol{d}$ desse segmento é a **distância de $\boldsymbol{P}$ à reta $\boldsymbol{r}$**.

Pode-se mostrar que essa distância é dada pela fórmula:

$$d = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

CALCULANDO ÁREAS

Área do paralelogramo



Vamos calcular a área de um paralelogramo que tem um dos vértices no ponto $O = (0, 0)$ e nos dois pontos P_1, P_2 e P_3, cujas coordenadas são (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) tais que O, P_1 e P_2 são não colineares (observe que apenas sabendo que O, P_1 e P_2 são não colineares, o quarto vértice P_3 fica determinado, já que P_3 é a intersecção das retas r e s, onde r é a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{OP_1}$ passando por P_2 e s é a reta paralela à reta $\overleftrightarrow{OP_2}$ passando por P_1)

A área do paralelogramo será o produto da distância OP_1 pela distância d do ponto P_2 à reta determinada por O e P_1, pois a distância d é a altura do paralelogramo relativa à base $\overline{OP_1}$. Lembremos que a área do paralelogramo é o produto dos comprimentos da base e da altura relativa à ela, logo, igual a $OP_1 \cdot d$.

Vamos aos cálculos:

Distância $OP_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Equação da reta por O e P_1: $y = \dfrac{y_1}{x_1}x$ ou $x_1\, y - y_1\, x = 0$.

Distância de P_2 à reta por O e P_1: $d = |x_1\, y_2 - y_1\, x_2| \,/\, \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$$\boxed{\text{Área do paralelogramo: } OP_1 \cdot d = |x_1\, y_2 - y_1\, x_2| = \det \boldsymbol{M}}$$

onde M é a matriz $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ e temos uma interpretação do determinante como área.

Observe que o cálculo da área desse paralelogramo pela fórmula acima só requer que saibamos as coordenadas de P_1 e P_2.

Usando a distância podemos também encontrar uma fórmula que nos dá a área de um triângulo com vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$.

A área pode ser calculada como o semiproduto do comprimento de um dos lados pela distância do terceiro vértice a esse lado. Após alguns cálculos pode-se também mostrar que a área do triângulo é dada por:

$$\text{Área do triângulo } ABC = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Agora faça você

1. Calcular a distância do ponto P à reta dada:

a) $P = (-3, -1)$, $3x - 4y + 8 = 0$;
b) $P = (3, 2)$, $5x - 5y + 2 = 0$;
c) $P = (1, -2)$, $x/12 + y/5 = 1$.

2. Calcular a área do trapézio cujos vértices são: $A = (0, 0)$, $B = (7, 1)$, $C = (6, 5)$ e $D = (-8, 3)$.

3. Determinar os pontos da reta $y = 2x$ que estão à distância 2 da reta $4x + 3y = 0$.

4. Determinar a equação de uma reta que passa por $(3, 0)$ e dista 2 unidades da origem.

5. Obter uma reta paralela à reta de equação $x + y + 6 = 0$ e distante $\sqrt{2}$ do ponto $C = (1, 1)$.

6. Calcular a área do triângulo cujos vértices são $(a, a+3)$, $(a-1, a)$ e $(a+1, a+1)$.

7. Calcular a área do quadrilátero cujos vértices são $A = (-1, 1)$, $B = (5, 0)$, $C = (7, 3)$ e $D = (3, -11)$.

8. Encontrar as coordenadas do vértice C de um triângulo ΔABC de área 6, sabendo que A = (0, 2), B é a intersecção da reta de equação $x - y - 4 = 0$ com o eixo dos x e C é um ponto da reta dada.

9. Determinar a área do triângulo DABC sabendo que $A = (1, -1)$ e B = $(-3, 2)$, $y = -x - 1$ é a equação do lado $\overline{BC}$ e o coeficiente angular da reta por A e C é 1.

10. Calcule a distância entre as duas retas paralelas: $3x + 4y - 15 = 0$ e $3x + 4y - 5 = 0$.

11. Há dois pontos na reta $y = 2$ que distam 4 unidades da reta $12y = 5x + 2$. Encontre a soma das abscissas desses pontos.

12. As retas $y = 4x$, $y = 2x - 1$ e a perpendicular à reta $y = 2x - 1$ pela origem determinam um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

13. Podemos mostrar que a bissetriz de um ângulo é o conjunto dos pontos do plano equidistantes dos lados do ângulo. Determinar as equações das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas $3x + 3y - 1 = 0$ e $2x - 2y + 1 = 0$.

14. Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes das retas $4x - 3y - 10 = 0$ e $12x + 5y - 13 = 0$.

15. Obter a equação da bissetriz interna, no ponto B, do triângulo cujos vértices são:

$$A = (5, 4),\ B = (1, 1) \text{ e } C = (4, -3).$$

16. A reta r tem equação $2x + y = 3$ e intercepta o eixo O_x no ponto A. A reta s passa pelo ponto $P = (1, 2)$ e é perpendicular à r. Sendo B e C os pontos onde s intercepta o eixo O_x e a reta r respectivamente,

a) encontre a equação de s;
b) calcule a área do triângulo ΔABC.

Sistemas Lineares - algumas aplicações

Um problema comercial

Uma floricultura produz arranjos de três tamanhos diferentes. Nos arranjos são utilizados rosas, margaridas e crisântemos. A tabela abaixo dá o número de flores de cada arranjo:

Arranjo/Flores	Pequeno	Médio	Grande
Rosa	1	2	4
Margarida	3	4	8
Crisântemo	3	6	6

Se em um dia a floricultura utiliza 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos, quantos arranjos de cada tipo foram feitos?

Chamemos x, y e z o número de arranjos de cada tipo. O número de rosas utilizado foi, portanto:

$$x + 2y + 4z = 24$$

Da mesma forma, os números de margaridas e crisântemos serão dados, respectivamente, por:

$$3x + 4y + 8z = 50$$
$$3x + 4y + 6z = 48$$

Para encontrar as soluções x, y e z, teremos que resolver o sistema linear com três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 24 \\ 3x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 6z = 48 \end{cases}$$

A resolução do sistema pode ser feita por eliminação; teremos $z = 1$, subtraindo uma das duas últimas equações pela outra; resolvendo o sistema obtido substituindo $z = 1$ nas duas primeiras equações, teremos: $x = 2$ e $y = 9$.

Balanceamento de equações associadas a processos químicos

Quando ocorre uma reação química há a necessidade de se estabelecer um balanceamento entre os reagentes e o produto da reação. Partimos do princípio de que o número de átomos em uma reação deve permanecer o mesmo.

Por exemplo, uma reação simples e bem conhecida é a reação em que duas moléculas de Hidrogênio (H_2) juntam-se a uma de oxigênio (O_2), formando moléculas de água (H_2O). A equação balanceada da reação é:

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

A mudança é representada por uma flecha.

A equação de combustão da amônia (NH_3) com o oxigênio (O_2)produz nitrogênio (N_2) e água (H_2O). Para balancear essa equação, vamos chamar x, y, z e w, respectivamente, o número de moléculas de cada um desses reagentes, escrevendo:

$$x\,NH_3 + y\,O_2 \longrightarrow z\,N_2 + w\,H_2O$$

Comparando o número de átomos de cada um dos reagentes para fazer o balanceamento, temos que:

Nitrogênio (N): $x = 2z$
Hidrogênio (H): $3x = 2w$
Oxigênio (O): $2y = w$

Note que este é um sistema linear com três equações e quatro incógnitas. Quando o número de equações é menor do que o número de incógnitas, o sistema será indeterminado, pois irá admitir uma infinidade de soluções. Vamos encontrar uma delas.

Comparando as equações,podemos escrever as incógnitas *y, z* e *w* em função de *x*:

$$z = \frac{x}{2},\ w = \frac{3x}{2} \text{ e } y = \frac{w}{2} = \frac{3x}{4}$$

Qualquer valor não-nulo que escolhermos para *x* irá determinar os valores de *y, z* e *w* .

Por exemplo, tomando $x = 4$, temos as soluções $y = 3$, $z = 2$ e $w = 6$, ficando a equação balanceada:

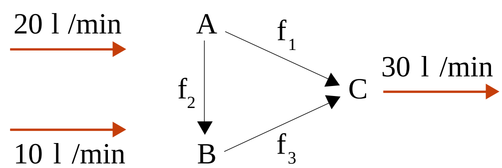
$$4\,NH_3 + 3\,O_2 \longrightarrow 2\,N_2 + 6\,H_2O$$

Se tivéssemos escolhido $x = 8$, obteríamos a equação

$$8\,NH_3 + 6\,O_2 \longrightarrow 4\,N_2 + 12\,H_2O$$

As equações lineares associadas a um sistema hidráulico

Um sistema hidráulico liga três pontos *A*, *B* e *C*. O fluxo de água, em litros por minuto, está descrito no diagrama abaixo. Podemos encontrar os fluxos intermediários f_1, f_2 e f_3 resolvendo um sistema linear.



No ponto *A*, temos a entrada de 20 litros por minuto e saídas f_1 e f_2, o que nos dá a equação:

$$f_1 + f_2 = 20$$

No ponto *B*, temos a entrada de 10 litros por minuto e a saída de f_1 o que nos dá a equação:

$$10 + f_2 = f_1$$

No ponto *C*, temos entrada de f_1 e f_3 litros por minuto e saída de 30 litros por minuto:

$$f_1 + f_3 = 30.$$

O problema novamente nos conduz a um sistema de três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = 20 \\ f_1 - f_2 = 10 \\ f_1 + f_3 = 30 \end{cases}$$

Este sistema pode ser facilmente resolvido por substituição: a segunda equação pode ser substituída pela primeira, assim teremos:

$10 + f_2 + f_2 = 20$, logo, $f_2 = 5$ e $f_1 = 15$.

Com esses valores de f_1 e f_2, a terceira equação nos dará $f_3 = 15$.

Sistemas Lineares – algumas aplicações

Uma matriz ***A*** (n x n – ou seja, cujo número de linhas é igual ao número de colunas) é **inversível** se existir uma matriz ***B*** (também n x n) tal que ***A . B*** = ***B . A*** = I_n, para cada valor de n.

As matrizes I_n são chamada matrizes identidades. Quando n = 2, 3, 4, ... essa matriz é:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ....$$

É sabido que toda matriz inversível tem determinante diferente de zero.

Criando e decifrando códigos

As matrizes também podem ser utilizadas para produzir códigos ou mensagens cifradas. Suponha que se queira mandar uma mensagem para alguém. Uma pessoa pode facilmente trocar letras por números, por exemplo, associando A $\leftrightarrow$ 1, B $\leftrightarrow$ 2, C $\leftrightarrow$ 3, etc. Com essa associação, em vez de BOM DIA, pode-se escrever:

2 15 13   4 9 1
(B O M   D I A)

Mas esse código é muito fácil de se decifrar, para dificultar, podemos colocar a mensagem disposta em uma matriz de duas linhas:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 13 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais ainda, podemos escolher convenientemente uma outra matriz A para melhorara a eficiência da codificação. Uma tal matriz deve ser 2 x 2 (pois vamos usar o produto de matrizes) e inversível (para que o destinatário possa decodificá-la).

Vamos escolher, por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Efetuando o produto ***A . M***, obteremos a matriz ***M'***:

$M' = A \,.\, M = \begin{pmatrix} 8 & 39 & 27 \\ 6 & 24 & 14 \end{pmatrix}$ será a mensagem enviada. A pessoa que receber a mensagem precisará inverter o processo. Para isso, ela deve conhecer a matriz ***A*** e sua inversa ***B***. Efetuando $B \,.\, M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 39 & 27 \\ 6 & 24 & 14 \end{pmatrix} = M$, já que

$$B \,.\, M' = B \,.(A \,.\, M) = (B \,.\, A) \,.\, M = I.\, M = M$$

Agora faça você

1. Calcule o determinante da matriz ***A*** dada acima.

2. Verifique se a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é a inversa da matriz ***A***.

3. Calcule $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 39 & 27 \\ 6 & 24 & 14 \end{pmatrix}$ e decodifique a mensagem.

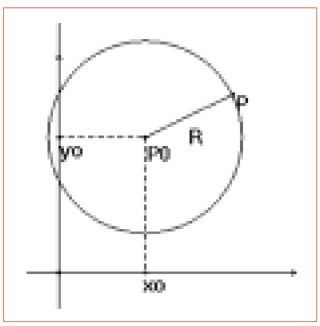
4. Invente uma mensagem secreta e envie a um colega (se o número de letras de sua mensagem for ímpar, complete a matriz com um zero). Veja se ele consegue decodificá-la.

Unidade 2

Circunferências

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Martha S. Monteiro
Elaboradora
Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

O ESTUDO DAS CIRCUNFERÊNCIAS



A circunferência com centro em um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e raio R > 0 é o conjunto de pontos do plano que estão à distância R do ponto P_0, ou seja, $PP_0 = d(P, P_0) = R$.

Usando a fórmula da distância, temos:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

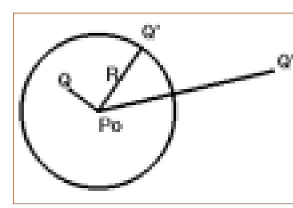
ou ainda:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

A equação acima é a chamada **equação da circunferência** com centro P_0 e raio R. Todo ponto do plano cujas coordenadas satisfazem essa equação pertence à circunferência e vice-versa.

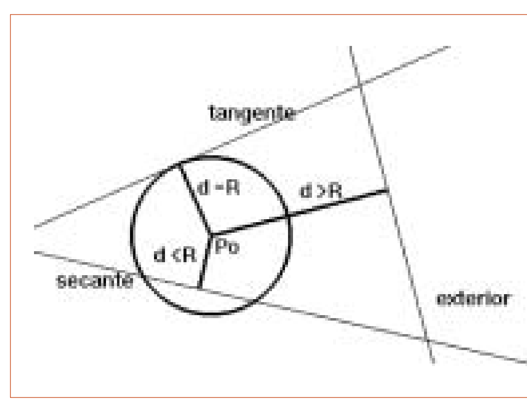
Um ponto Q do plano pode estar:

- no **interior** da circunferência, se $d(Q, P_0) < R$;
- no **exterior** da circunferência, se $d(Q, P_0) > R$.



Dada uma circunferência e uma reta, temos três possibilidades:

- a reta e a circunferência não têm pontos em comum: neste caso, todos os pontos da reta são exteriores à circunferência; diremos que a reta é **exterior** à circunferência;
- a reta e a circunferência têm apenas um ponto em comum: neste caso, a reta é **tangente** à circunferência;
- a reta e a circunferência têm exatamente dois pontos em comum: neste caso, a reta é dita **secante** à circunferência.



A distância do centro P_0 da circunferência a uma reta r dada nos permite distinguir as três possibilidades acima. Temos:

- a reta r é **exterior à circunferência** se $d(P_0, r) > R$;
- a reta r é **tangente à circunferência** se $d(P_0, r) = R$;
- a reta r é **secante à circunferência** se $d(P_0, r) < R$.

Agora faça você

1. Encontre a equação da circunferência:

a) com centro (2, 1) e raio 2;
b) com centro (–1, 3) e raio $\sqrt{3}$;
c) com centro (1/2, 3/2) e raio 4.

2. Qual é a equação da circunferência que passa pelo ponto (3, –2) e tem centro (1, 1)?

3. Encontre o centro e o raio das circunferências:
a) $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

4. Para que valores de m e k a equação abaixo representa uma circunferência?
a) $mx^2 + y^2 + 4x + 6y + k = 0$;
a) $mx^2 + 2y^2 + 2x + 8y - k = 0$
b) $mx^2 + y^2 + 2x + 4y + k = 0$

5. Obtenha a equação da circunferência que passa pelo ponto (10, 1), tem raio 5 e tangencia o eixo das abscissas.

6. (Fuvest) Uma circunferência passa pelos pontos (2, 0), (2, 4) e (0, 4). Logo, a distância do centro dessa circunferência à origem é:
a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{4}$ d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{6}$

7. Encontre a equação da circunferência que passa pelos pontos (1, 2), (2, 3) e (–3, –4).

8. Qual a posição dos pontos (0, 0), (7, –5) e (4, –2) em relação à circunferência $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$?

9. A circunferência de centro (1, 2) e raio $\sqrt{5}$ passa pelo ponto (2, p). Encontre os valores de p.

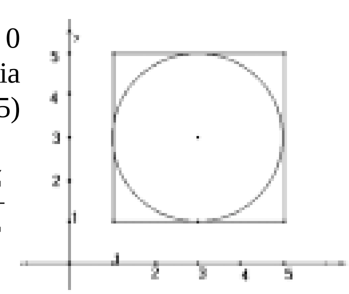
10. O centro de uma circunferência pertence à reta $y = x$. Sabendo que essa circunferência passa pelos pontos (–1, –2) e (6, 5), determine a sua equação.

11. Um quadrado tem vértices consecutivos $A = (5, 0)$ e $B = (-1, 0)$. Determine a equação da circunferência circunscrita ao quadrado.

12. Determine a posição relativa entre a reta e a circunferência em cada caso:
a) $x - 3y - 2 = 0$ e $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
b) $y = 2x + 1$ e $x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$;
c) $x - 2 = 0$ e $4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$;
d) $y + 3 = 0$ e $4x^2 + 4y^2 - 56x + 4y + 179 = 0$.

13. Obter a equação da circunferência de centro (– 2, 1) tangente à reta de equação $4x + 3y = 0$.

14. (Fuvest) Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto (2, 0) e é tangente a circunferência inscrita no quadrado de vértices (1, 1), (5, 1), (5, 5) e (1, 5). Então:



a) $0 < m < \frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3} < m < 2$ e) $1 < m < \frac{5}{3}$
b) $m = \frac{2}{3}$ d) $m = 1$

15. Determinar o comprimento da corda determinada pela reta $x + y - 2 = 0$ sobre a circunferência de centro (1, 1) e raio $2\sqrt{2}$

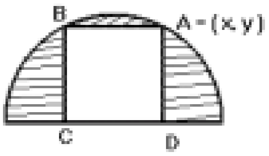
16. Encontre para que valores de k a reta $x - k - 1 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ são:
a) secantes b) tangentes c) exteriores

17. Encontre o comprimento da corda que a reta $y = x$ determina sobre a circunferência de equação $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

18. Encontre a equação da circunferência de centro (1, 5) e tangente à reta de equação $3x - 4y + 7 = 0$.

19. A reta $y = 3x$ é tangente a uma circunferência com centro (2, 0). Calcule o raio dessa circunferência.

20.(Fuvest) Considere o quadrado $ABCD$ inscrito na semicircunferência de centro na origem. Se (x, y) são as coordenadas do ponto A, então a área da região exterior ao quadrado ABCD e interior à semicircunferência é igual a:



a) $(5\pi/2 - 4)\, x^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $(5\pi - 4)\, x^2$ d) $(5\pi/2 - 2)\, x^2$ e) $\pi x^2 - y^2$

21. (Fuvest) a) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular $m > 0$. A circunferência C passa pelos pontos (1, 0) e (3, 0) e tem centro no eixo x. Para qual valor de m a reta r é tangente a C?
b) Suponha agora que o valor de m seja menor do que aquele determinado no ítem anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de intersecção de r com C.

22. (Fuvest) Os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ situado no primeiro quadrante. O lado $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $y = -2x$ e o ponto D pertence à circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{5}$. Então, as coordenadas de C são:

a) (6, 2) b) (6, 1) c) (5, 3) d) (5, 2) e) (5, 1)

23. (Fuvest) Na figura ao lado, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\angle$B o ângulo reto. Sabendo-se que $A = (0, 0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3, 4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determine as coordenadas:

a) do vértice B; b) do vértice C.

24. Descreva o lugar geométrico dos pontos do plano que verificam a equação $x^2 - y^2 + 3x - 3y = 0$

25. Uma reta encontra uma circunferência com centro na origem nos pontos $A = (3, 4)$ e $B = (-4, 3)$.

a) Qual é o raio dessa circunferência?
b) Calcule a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos A e B e seus simétricos em relação à origem.

26. Uma reta passa pelo ponto $P = (3, 2)$ e é tangente à circunferência com centro $C = (1, 1)$ e raio 1 num ponto T. Calcule a distância de P a T.

27. No plano O_{xy} considere os seguintes conjuntos de pontos:

A= $\{(x, y) \mid |x| \geq 3\}$, B = $\{(x, y) \mid |y| \geq 4\}$ e
C= $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.
Encontre a área do conjunto $C - (A \cup B)$.

Unidade 3
Cônicas, parábolas, elipses e hipérboles

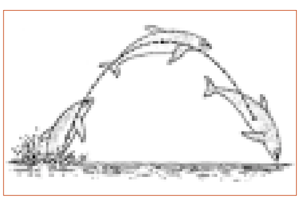
Organizadores

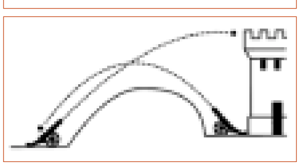
Antônio Carlos Brolezzi

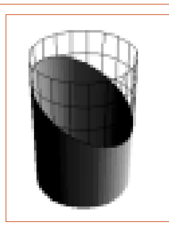
Martha S. Monteiro

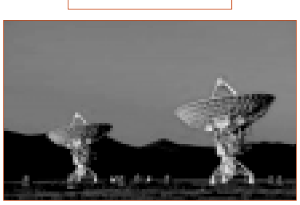
Elaboradora

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão









As curvas obtidas quando cortamos um cone (as chamadas secções cônicas) aparecem com freqüência na natureza e na nossa vida cotidiana. Desde os tempos mais remotos elas despertaram a curiosidade do homem.

Vamos destacar alguns exemplos:

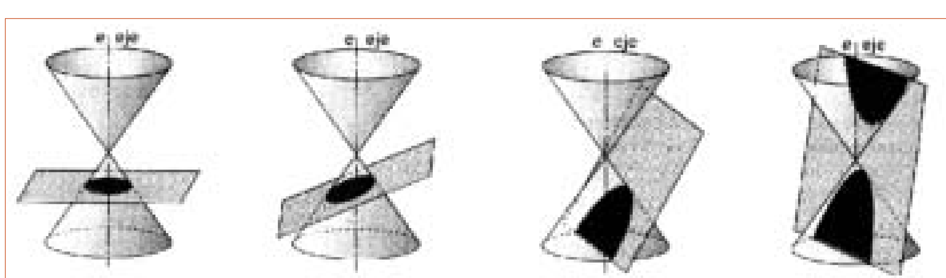
- ao cortar uma árvore podemos encontrar uma secção com a forma de uma elipse;
- as órbitas descritas pelos planetas girando em torno do Sol são elípticas;
- ao atirar uma pedra, temos descrita uma trajetória parabólica;
- encontramos hoje antenas parabólicas por toda parte;
- em condições ideais, a chamada onda de choque produzida por um avião supersônico varre a região interior a uma hipérbole.

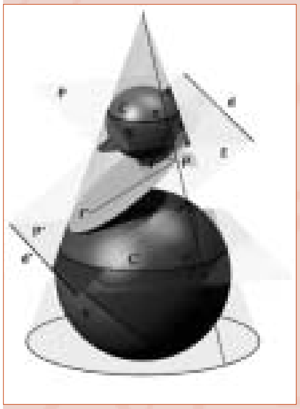
Desde a antiguidade essas curvas tiveram suas propriedades extensamente estudadas. A primeira referência ao estudo das cônicas de que se tem notícia está registrada no trabalho de um geômetra grego de nome Menaechmus, aluno de Eudoxo e contemporâneo de Platão. Seguiram-se trabalhos de Euclides, Arquimedes e o trabalho mais importante e completo foi o de Apolônio, um grande geômetra e astrônomo que viveu no século III A. C. Apolônio é considerado o último dos grandes geômetras da escola grega. Já na era cristã, Pappus, um historiador da Geometria grega, acrescentou ao estudo dessas curvas novas informações, que chamamos propriedades foco-diretriz.

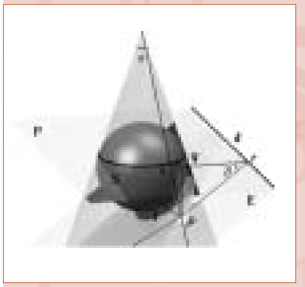
Todos esses geômetras exploraram, portanto, as curvas obtidas cortando um cone (que pode ser um cone duplo, como na figura a seguir) por um plano. Observe que, variando a posição do plano de corte, temos, como intersecção (a partir da esquerda):

- uma circunferência, quando o plano de corte é perpendicular ao eixo do cone;
- uma elipse, se o inclinamos um pouco;
- uma parábola, se o plano fica paralelo a uma geratriz do cone;
- os dois ramos de uma hipérbole, se o plano corta as duas folhas do cone.

Germinal Dandelin provou, em 1837, que os focos de uma secção cônica são os pontos em que o plano de corte tangencia esferas inscritas no cone.





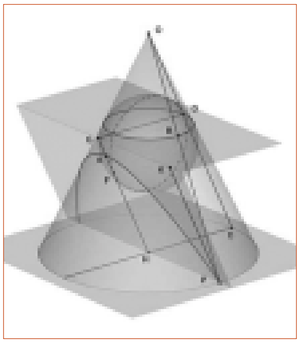


As trajetórias elípticas dos planetas em torno do Sol, descritas por Kepler em seu famoso trabalho do início do século XVII, trazem as cônicas de volta ao cenário da Matemática da época.

As relações métricas que hoje utilizamos para o estudo das cônicas, do ponto de vista da Geometria Analítica, e que envolvem as distâncias aos focos ou à diretriz foram provadas de forma muito interessante, no século XIX, por Dandelin, e constituem os chamados "teoremas belgas" para as cônicas. As figuras ilustram como são encontrados os principais elementos das cônicas nesse trabalho.

Associados às parábolas, elipses e hipérboles, temos pontos que chamamos **focos**, que são os pontos de tangência do plano de corte do cone com as esferas mostrados em cada uma das figuras ao lado. Temos também retas que são chamadas **diretrizes**, denotadas por *d* e *d´* ou somente *d* nas mesmas figuras. Detalhando as propriedades geométricas que relacionam os elementos que nelas aparecem teremos as propriedades que caracterizam cada uma das curvas,chamadas de secções cônicas, que passaremos a estudar a seguir.

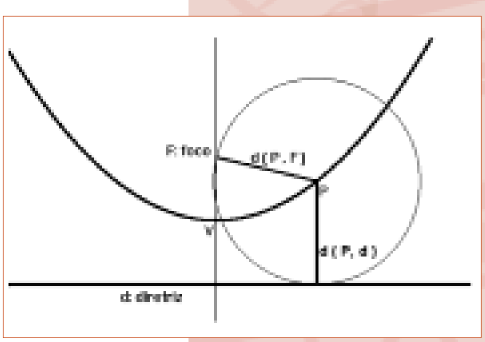
Propriedades métricas das secções cônicas e suas equações gerais



Para trabalhar com as secções cônicas utilizando os recursos da Geometria Analítica o passo inicial é a escolha de um sistema de coordenadas. O segundo passo é encontrar uma equação, nas coordenadas escolhidas, cujo conjunto solução corresponda aos pontos da curva que queremos estudar.

Um bom sistema de coordenadas é, em geral, aquele em que a equação que descreve a curva seja razoavelmente simples, ou a mais simples possível.

Estudo da Parábola



No módulo 4 (página 27), a parábola já foi estudada utilizando a definição que será também adotada para explorarmos suas propriedades do ponto de vista da Geometria Analítica.

Examinando o corte do cone que nos dá a parábola, ilustrado pela figura acima, observamos que ela tem um **foco** *F* e uma **reta diretriz** *d* (que é a reta por *G* e *K*).Verifica-se que:

> Os pontos *P* da parábola são os pontos eqüidistantes do foco e da diretriz

ou seja, tais que $\mathbf{d}\,(P, F) = PF = \mathbf{d}\,(P, d)$

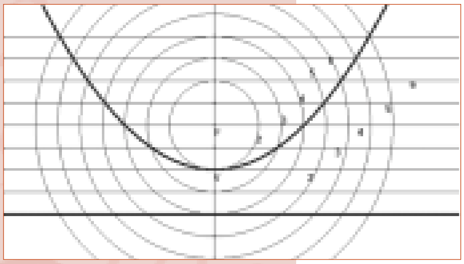
O **eixo** da parábola é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz. A parábola é simétrica em relação ao eixo .

Usando o caderno

Vamos construir o gráfico de uma parábola por pontos. Escolha:

- um ponto sobre uma das linhas do caderno para ser o **foco** da parábola;
- uma outra linha como a **reta diretriz**, seguindo a figura a seguir (a construção fica mais fácil se a distância do foco à diretriz é um número par);
- a perpendicular à diretriz, passando pelo foco – que será o **eixo** da parábola.

Propriedade refletora da parábola: os raios paralelos ao eixo de simetria se refletem passando pelo foco.



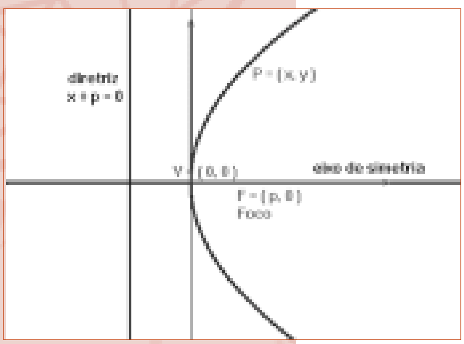
O primeiro ponto da parábola que identificamos é o seu **vértice**, que é o ponto médio do segmento com extremos no foco e no ponto de intersecção do eixo com a diretriz.

Com o auxílio do compasso, vamos traçar as circunferências com centro no foco, passando pelos pontos de intersecção das linhas do caderno com o eixo. A distância entre as linhas pode ser considerada a nossa unidade de medida.

No exemplo acima, o vértice está distante 2 unidades do foco e da diretriz. Os pontos que estão 3 unidades distantes do foco e da diretriz são os pontos de intersecção da circunferência de raio 3 com a reta que dista 3 unidades da diretriz (observe que temos sempre dois pontos, dada a simetria da parábola em relação ao eixo). Esses serão os pontos da parábola cujo gráfico queremos desenhar.

Para obter mais pontos, vamos aumentando a distância ao foco e à diretriz de uma unidade em cada etapa; dessa forma encontramos uma série de pontos da parábola, observando sempre a propriedade:

$$PF = \mathrm{d}\,(P, d)$$



Para encontrar a equação da parábola, da mesma forma que na construção acima, tomamos o segmento da perpendicular à diretriz que passa pelo foco. Como já observamos, o **vértice** *V* da parábola é o ponto médio desse segmento.

Vamos escolher o sistema de coordenadas de forma que a origem (0, 0) coincida com o vértice *V* e um dos eixos coordenados coincida com o seu eixo de simetria.

Tomando coordenadas (p, 0) para o foco *F*, a equação para a reta diretriz d será $x + p = 0$ (verifique, lembrando da simetria).

A **excentricidade** de uma cônica é a razão entre a distância *PF*, de um ponto P da curva ao foco *F*, e a distância d (*P*, *d*) de *P* à reta diretriz *d*, isto é:

e = PF/ d (P,r)

A caracterização das cônicas através da excentricidade é muito antiga, aparece, pela primeira vez nos trabalhos de Pappus, um dos últimos geômetras da Escola de Alexandria e que viveu no século III da era cristã.

A igualdade *PF* = d (*P*, *d*) nos leva a uma outra caracterização da parábola, como a cônica de excentricidade igual a 1. A elipse e a hipérbole são respectivamente as cônicas cuja excentricidade é menor ou maior do que um.

Se $P = (x, y)$ é um ponto da parábola, usando a fórmula para a distância euclidiana e a expressão para a distância de P a d, obtemos (como já foi verificado no módulo 4, usando as distâncias) a equação:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Elevando ao quadrado, teremos:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2,$$

e, finalmente, simplificando, chegamos à **equação reduzida da parábola** (com eixo de simetria no eixo O_x):

$$y^2 = 4px.$$

Se trocarmos o eixo de simetria ou a posição do foco e da diretriz, podemos ter como variantes as equações:

$$y^2 = -4px \text{ (foco em } (-p, 0));$$
$$x^2 = 4py \text{ (foco em } (0, p));$$
$$x^2 = -4py \text{ (foco em } (0, -p)).$$

As duas últimas equações correspondem a gráficos de funções já estudados no módulo 4.

Se o vértice da parábola estiver em um ponto com coordenadas (x_0, y_0), as equações se alteram (temos uma translação no plano); a equação da parábola com vértice em (x_0, y_0) fica na forma:

$$(y - y_0)^2 = 4p\,(x - x_0),$$

o mesmo ocorrendo com as variações acima.

Agora faça você

1. Determine o foco, o vértice e a diretriz de cada uma das parábolas abaixo, fazendo um esboço do gráfico:

a) $y^2 = 16x$ d) $5y^2 = 12x$ c) $x^2 + 40y = 0$

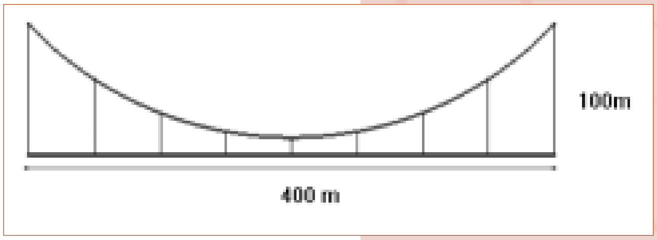
b) $y^2 + 28x = 0$ e) $2x^2 = 7yy$ f) $7x^2 = 15y$

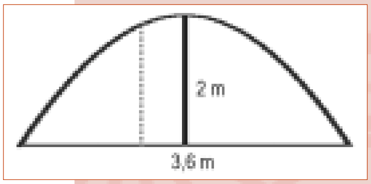
2. Escreva as equações reduzidas das parábolas com vértice na origem para cada um dos dados abaixo:

a) foco: (8, 0);
b) diretriz: $y = 2$;
c) eixo de simetria: eixo O_y e um ponto da parábola: (5, 10);
d) um ponto da diretriz: (4, 7) e o eixo de simetria: eixo O_x.;
e) dois pontos da parábola: (6, 18) e (6, –18).

3. Determine as dimensões do retângulo de maior área cuja base está no eixo O_x e cujos dois vértices superiores estão no gráfico da parábola de equação $y = 12 – x^2$.

4. Uma ponte de 400 metros de comprimento tem, para sustentação lateral, um cabo com forma parabólica como exemplificado na figura. O cabo está 100 metros acima do piso nos extremos da ponte e a 4 metros acima no seu centro. Cabos verticais estão colocados em intervalos de 50 metros. Quantos metros de cabo serão necessários para trocar os cabos verticais?





5. Um arco parabólico tem altura de 2 m e largura de 3,6 m na base. Se o vértice da parábola está no topo do arco, com que altura sobre a base terá uma largura de 1,8m ?

6. Admita que a água escoa de uma caixa d'água por um ponto que está a 2,5 m do chão, descrevendo uma curva parabólica da fórmula $y = -a\,x^2 + 2{,}5$. Se em um ponto a 0,8 m do ponto de escoamento da água na caixa o fluxo de água curvou-se 1m além da reta vertical pelo furo, a que distância desta reta a água tocará o chão?

7. Um telescópio tem um espelho refletor parabólico cuja distância do vértice ao foco é de 30 cm. Se a largura do espelho na parte superior é de 10 cm, qual a profundidade do espelho no centro?

Estudo da elipse

Quando cortamos um cone (ou um cilindro) e temos uma elipse como curva resultante no corte, podemos verificar que essa curva tem dois focos, os quais chamaremos F_1 e F_2. A figura acima ilustra a propriedade métrica que caracteriza os pontos P de uma elipse:

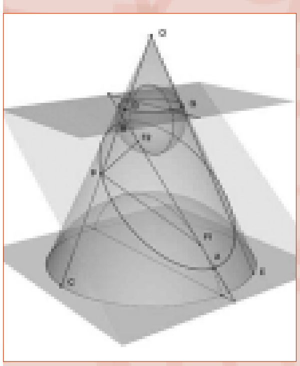
> A soma das distâncias de P a F_1 e F_2 é constante.

Propriedade refletora da elipse

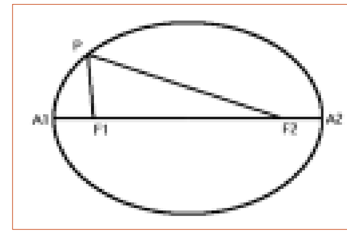
Se tivéssemos uma mesa de bilhar elíptica, poderíamos verificar a seguinte propriedade:

toda bola que parte de um dos focos baterá na borda e será refletida passando pelo outro foco.

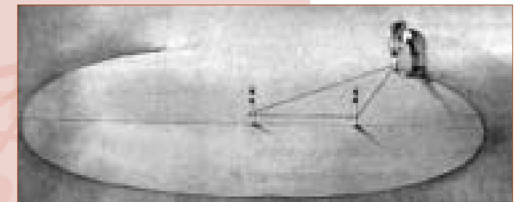
Essa propriedade de reflexão da elipse é utilizada, por exemplo, no planejamento da acústica de salas de espetáculos.



Chamando essa constante de $2a$, podemos verificar que $2a = A_1A_2$, sendo A_1A_2 o chamado eixo maior da elipse. A propriedade métrica verificada pelo ponto P é:

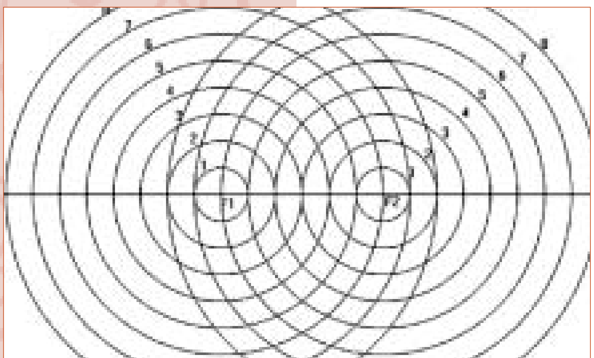


$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad PF_1 + PF_2 = 2a$$



A figura ao lado dá uma forma prática para desenhar uma elipse: fixando as extremidades de um barbante nos focos, basta mantê-lo esticado e deixar correr o lápis para traçarmos a curva.

Construindo uma elipse por pontos

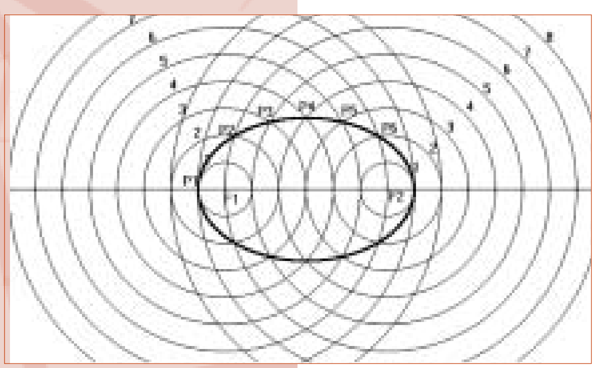


Podemos construir pontos de uma elipse usando um procedimento parecido com o que foi utilizado para estudar a parábola.

Para essa construção, não precisaremos das linhas do caderno, mas podemos utilizar a distância entre elas como unidade de comprimento. Começamos escolhendo dois pontos cuja distância seja um número inteiro e traçamos circunferências concêntricas com centros nesses pontos de forma que os raios sejam múltiplos da unidade de medida que escolhemos.

No exemplo acima, $F_1F_2 = 6$ unidades de medida e para encontrar os pontos de uma elipse, vamos escolher $2a = 8$, ou seja, os pontos da elipse procurada devem verificar:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = 8.$$



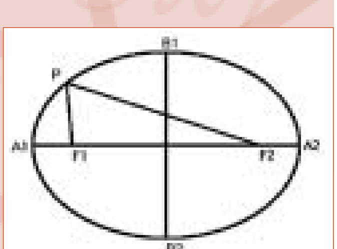
Um ponto P_1 da elipse tal que $d(P_1, F_1) = 1$ (portanto, um ponto da circunferência com centro F_1 e raio 1) deve estar distante 7 unidades do ponto F_2, logo, está na circunferência com centro F_2 e raio 7.

Um ponto P_2 da elipse tal que $d(P_2, F_1) = 2$ (portanto, um ponto da circunferência com centro F_1 e raio 2) deve estar distante 6 unidades do ponto F_2, logo, está na circunferência com centro F_2 e raio 6.

Sucessivamente, podemos determinar um conjunto de pontos pertencentes à elipse com focos F_1 e F_2 e eixo maior com comprimento 8. Unindo os pontos assim obtidos temos a figura ao lado.

Para escrever em coordenadas a equação de uma elipse vamos precisar da expressão para a distância euclidiana entre dois pontos P_1 e P_2 cujas coordenadas em termos de um sistema de coordenadas com eixos ortogonais são, respectivamente, (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



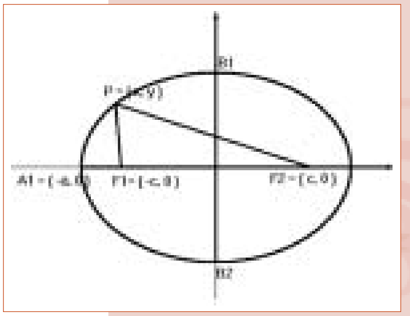
Equação geral da elipse

Consideremos agora uma elipse como na figura ao lado.

Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse; os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são os seus vértices.

Os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são o eixo maior (ou eixo transverso) e o eixo menor (ou eixo conjugado), respectivamente. Estes eixos são também chamados **eixos principais** da elipse.

Vamos fazer a escolha do sistema de coordenadas de maneira que a origem seja o ponto médio do segmento cujos extremos são os focos e que os eixos coordenados coincidam com os eixos principais ou com os eixos de simetria da elipse. A origem do sistema de coordenadas é também chamado o seu **centro** .



Com essa escolha, as coordenadas dos focos F_1 e F_2 serão: $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$; os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 terão suas coordenadas dadas respectivamente por (– a, 0), (a, 0), (0, – b) e (0, b).

Dado um ponto P da elipse, vamos considerar (x, y) suas coordenadas. Usando agora a fórmula da distância euclidiana e a caracterização dos pontos da elipse como o conjunto de pontos P tais que $PF_1 + PF_2 = 2a$, podemos escrever

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Mudando uma das raízes de membro, elevando ao quadrado e simplificando, chegamos à expressão:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Novamente elevando ao quadrado e simplificando teremos:

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

A equação acima é tal que, se $x = 0$, suas soluções y correspondentes são tais que

$$y^2 = a^2 - c^2$$

Os pontos em que a elipse intercepta o eixo dos y são os pontos B_1 e B_2, cujas coordenadas são $(0, -b)$ e $(0, b)$ respectivamente; logo, tomando $x = 0$ na equação acima podemos concluir que

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ ou } c^2 = a^2 - b^2$$

Portanto, a equação acima se reescreve:

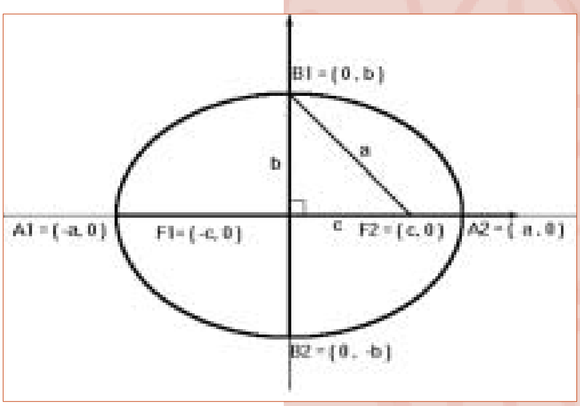
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

e, dividindo ambos os membros por $a^2 b^2$, temos a chamada **equação reduzida da elipse**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É sempre importante observar que:

- $2a$ é o comprimento do eixo maior da elipse;
- $2b$ é o comprimento do eixo menor da elipse;
- b foi escolhido de forma que $b^2 = a^2 - c^2$, logo, $a^2 = b^2 + c^2$. Temos então um triângulo retângulo naturalmente associado a esses três valores, representado na figura abaixo;
- a excentricidade da elipse é dada por $e = \dfrac{c}{a}$ e, como $c < a$, $e < 1$.



Se os focos da elipse estiverem no eixo O_y, podemos repetir os cálculos e verificar que a equação ficará na forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sendo $a > b$; podemos observar que na equação da elipse o maior denominador sempre determina qual é o eixo principal.

Se o centro da elipse não coincide com a origem do sistema de coordenadas e temos o centro num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, a equação da elipse fica na seguinte forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Agora faça você

1. Esboce o gráfico de cada uma das elipses abaixo, destacando as coordenadas dos focos e dos vértices:

a) $x^2 + 4y^2 = 16$ b) $49x^2 + 40y^2 = 1960$ c) $36x^2 + 9y^2 = 4$ d) $x^2 + 2y^2 = 5$

2. Encontre a equação da elipse com centro na origem e:

a) passando por (6, 0), sabendo que um vértice do semi-eixo maior tem coordenadas (0, 8);
b) passando por (4, 0) e um dos focos em (1, 0);
c) passando por (0, 7) e um dos focos em (0, 6);
d) um dos focos em (4, 0) e excentricidade 2/5;
e) eixos de simetria coincidentes com os eixos coordenados, passando por (4, 0) e (3, 2);
f) um dos vértices do semi-eixo maior em (0, 4) e excentricidade $\frac{1}{2}$;
g) foco em (0, 2), passando por $(\sqrt{3}, 1)$.

3. Encontre as coordenadas dos vértices e a área de um quadrado com lados paralelos aos eixos coordenados e inscrito na elipse de equação $9x^2 + 16y^2 = 100$.

4. (Fuvest) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, interceptam-se nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é:

a) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

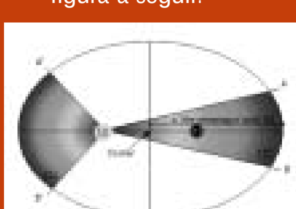
b) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

5. Se $A = (10, 0)$ e $B = (-5, y)$ são pontos de uma elipse cujos focos são $F_1 = (-8, 0)$ e $F_2 = (8, 0)$, então o perímetro do triângulo BF_1F_2 é:

a) 24 b) 36 c) 40 d) 60 e) nenhuma das anteriores

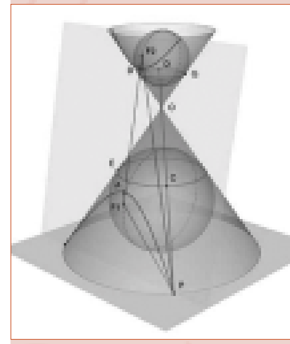
6. Um ponto se desloca no plano de modo que sua distância ao ponto (3, 2) fica sempre igual a metade da sua distância à reta de equação $x+2 = 0$. Deduza a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto e identifique-o.

No início do século XVII, Johannes Kepler, astrônomo e matemático alemão, anunciou as suas leis para o movimento dos planetas: as órbitas descritas são elipses que têm o Sol em um dos focos. Mostrou ainda que em iguais intervalos de tempo o raio varre áreas iguais, como ilustrado na figura a seguir.



7. O conjunto dos pontos, cuja soma das distâncias aos pontos fixos (–1, 0) e (1, 0) é sempre igual a 4, intercepta o eixo dos y em pontos de ordenada:

a) 0 e 2 b) $\pm\sqrt{2}$ c) $\pm$ 3 d) $\pm\sqrt{5}$ e) $\pm\sqrt{5}$



ESTUDO DA HIPÉRBOLE

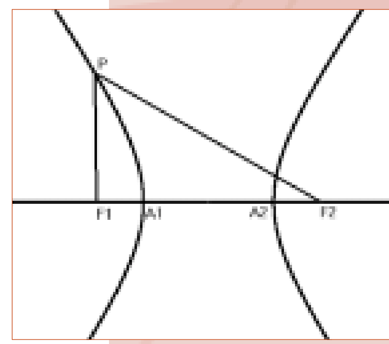
A hipérbole é uma curva obtida quando um plano corta as duas folhas de um cone duplo, como o da figura ao lado. Considerando esferas inscritas no cone e tangentes ao plano de corte, ficam determinados os dois focos F_1 e F_2.

A propriedade métrica que caracteriza os pontos P de uma hipérbole é:

> O valor absoluto da diferença das distâncias de P aos pontos F_1 e F_2 é constante.

isto é:

$$|\,d\,(P, F_1) - d\,(P, F_2)\,| = |\boldsymbol{PF_1} - \boldsymbol{PF_2}| = 2a$$

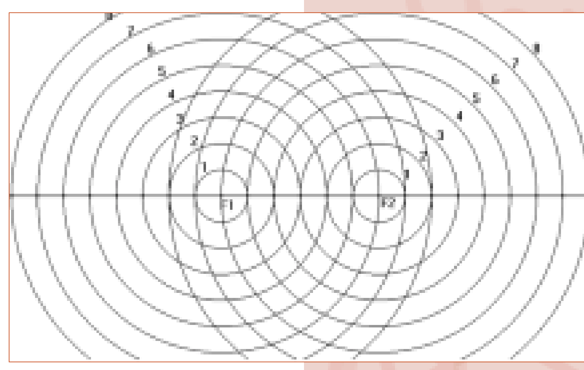


A reta pelos pontos F_1 e F_2 é chamada **eixo transverso** da hipérbole. Os pontos A_1 e A_2 onde essa reta corta a hipérbole são os seus **vértices**.

A distância entre os pontos A_1 e A_2 é o valor da constante 2a da definição da hipérbole. Se a distância entre os focos é 2c, temos que $c > a$.

Construindo uma hipérbole por pontos

Para construir pontos de uma hipérbole podemos usar o mesmo conjunto de circunferências que desenhamos para a construção da elipse por pontos.



A distância entre os pontos F_1 e F_2 que vamos usar para construir a hipérbole é a mesma da elipse, ou seja, $2c = 6$. Como $c > a$, vamos tomar $2a = 4$.

Se um ponto P_1 da hipérbole é tal que d $(P_1, F_1) = 1$ (portanto, um ponto da circunferência com centro F_1 e raio 1), para saber qual será a distância do ponto P_2 ao foco F_2, devemos lembrar que

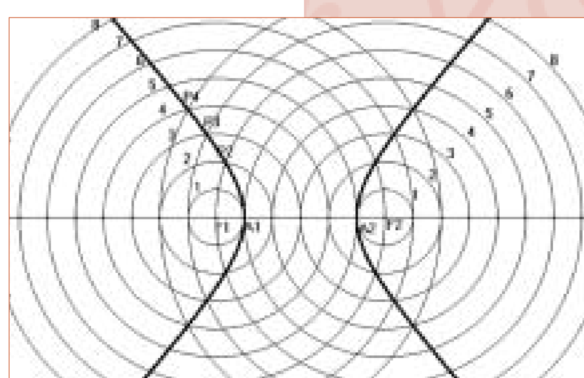
$$|d\,(P, F_1) - d\,(P, F_2)| = |PF_1 - PF_2| = 2a$$

portanto, $|1 - d\,(P, F_2)| = 4$.

As possibilidades são:

a) $1 - d\,(P, F_2) = -4$, portanto, $d\,(P, F_2) = 5$;

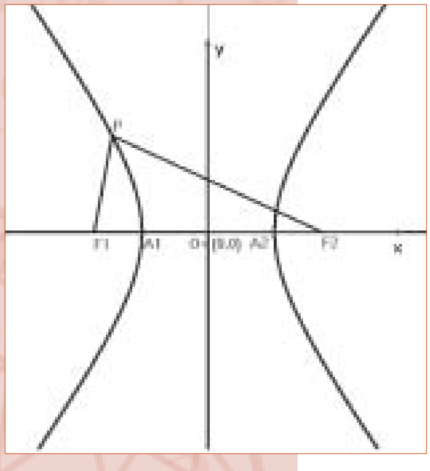
b) $1 - d\,(P, F_2) = 4$, ou $d\,(P, F_2) = -3$, o que não é possível, pois a distância deve ser sempre positiva. Portanto, o ponto P_1 está também na circunferência com centro F_2 e raio 5.

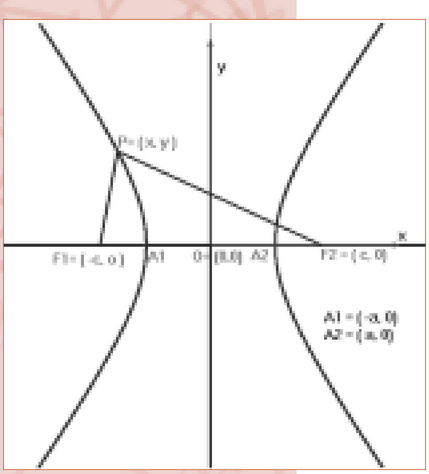


Um ponto P_2 da hipérbole tal que d $(P_2, F_1) = 2$ (portanto, um ponto da circunferência com centro F_1 e raio 2) deve estar à distância 6 do ponto F_2, logo, está na circunferência com centro F_2 e raio 6.

Sucessivamente, podemos determinar um conjunto de pontos pertencentes à hipérbole com focos F_1 e F_2 e distância entre os vértices igual a 4. Unindo os pontos assim obtidos obtemos a figura ao lado.

EQUAÇÃO GERAL DA HIPÉRBOLE





Dada uma hipérbole, como na figura ao lado, sejam os pontos F_1 e F_2 os seus focos, vamos tomar um sistema de coordenadas em que o eixo O_x é a reta orientada passando pelos focos e com a origem no ponto médio dos focos.

A origem do sistema de coordenadas é também chamado de centro da hipérbole.

Com essa escolha, as coordenadas dos focos F_1 e F_2 serão $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$; os vértices A_1 e A_2 terão suas coordenadas dadas respectivamente por $(-a, 0)$ e $(a, 0)$.

Dado um ponto P da hipérbole, com coordenadas (x, y). Usando agora a fórmula da distância euclidiana e a caracterização dos pontos da hipérbole como o conjunto de pontos P tais que

$$|PF_1 - PF_2| = 2a,$$

podemos escrever

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$\text{ou } \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\, 2a$$

Mudando uma das raízes de membro, elevando ao quadrado e simplificando chegamos à expressão:

$$\pm\, a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - c\,x.$$

Novamente elevando ao quadrado e simplificando teremos:

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

A equação acima é tal que, se $x = 0$, suas soluções y correspondentes são tais que

$$y^2 = a^2 - c^2 < 0$$

Não temos agora pontos de intersecção da curva com o eixo O_y, pois não existem y tais que $y^2 < 0$. Chamaremos

$$b^2 = -\,(a^2 - c^2) \text{ ou } b^2 = c^2 - a^2$$

e a equação acima é reescrita:

$$-\,b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = -\,a^2\,b^2$$

Dividindo ambos os membros por $-\,a^2\,b^2$, temos a chamada **equação reduzida da hipérbole**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É sempre importante observar que:

- $2a$ é a distância entre os vértices (quando $y = 0$, temos as soluções $(a, 0)$ e $(-\,a, 0)$, que são os vértices da hipérbole);
- 2 c é a distância entre os focos;
- b foi escolhido de forma que $b^2 = c^2 - a^2$, logo, $a^2 + b^2 = c^2$. Temos um triângulo retângulo naturalmente associado a esses três valores representado na figura a seguir;
- a excentricidade da hipérbole é dada por $e = \dfrac{c}{a}$. Como $c > a$ e $e > 1$;

Propriedade refletora da hipérbole

Se um raio de luz for emitido do foco de uma hipérbole refletora, ele será refletido na direção da reta que passa pelo outro foco. Essa propriedade da hipérbole é bastante utilizada na construção de artefatos refletores.

- as retas cujas equações são $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são as **assíntotas** da hipérbole.

Se os focos da hipérbole estiverem no eixo O_y, podemos repetir os cálculos e verificar que a equação ficará na forma:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Podemos observar que na equação da hipérbole o sinal positivo sempre determina qual é o eixo principal.

Se o centro da hipérbole não coincide com a origem do sistema de coordenadas, mas sim num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, a equação fica na forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Agora faça você

1. Encontre a equação da hipérbole com centro na origem, dados:

a) os vértices (4, 0) e (–4, 0) e os focos (5, 0) e (–5, 0);

b) os focos em (0, 6) e (0, –6) e a excentricidade 3/2;

c) passando por (2, 4) com vértices em (0, 3) e (0, –3);

d) focos em (4, 0) e (–4, 0) e um de seus pontos: (5, 3)

e) excentricidade 2, eixo principal: eixo dos x e um ponto da curva: (4, 1)

f) vértices em (0, 3) e (0, –3) e uma das assíntotas $y = \frac{2x}{3}$;

g) um de seus pontos (6, 1) e uma assíntota $y = \frac{2x}{3}$;

h) um dos focos (0, 4) e uma das assíntotas: $y = \frac{x}{2}$.

2 . Encontre os pontos de intersecção da elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ com a hipérbole $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$. Mostre que essas duas cônicas são confocais, isto é, têm os mesmos focos.

3. Um ponto se desloca no plano de modo que sua distância ao ponto (3, 2) fica sempre igual ao dobro da distância à reta de equação $x + 2 = 0$. Deduza a equação da curva descrita e identifique-a.

4. Numere a Coluna I de acordo com a Coluna II

Coluna I	Coluna II
( ) elipse	(1) $2x + 3y - 1 = 0$
( ) parábola	(2) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
( ) hipérbole	(3) $y - x^2 + 5x - 6 = 0$
( ) reta	(4) $x^2 - y^2 = 4$
( ) circunferência	(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

A seqüência correta, de cima para baixo, na Coluna I é:

a) 4 5 3 2 1 b) 5 3 2 1 4 c) 2 3 5 1 4 d) 5 3 4 1 2
e) nenhuma das anteriores

5. Das equações abaixo, a que representa uma parábola de eixo coincidente com a reta $y = 0$ é:

a) $y = x^2 + 1$
b) $x = y^2 + 1$
c) $y - x^2 = 0$
d) $x^2 - y^2 = 1$
e) $x = \frac{1}{y} + 3$

6. A distância entre os focos da cônica $3x^2 - y^2 = 9$ é:

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$ e) $8\sqrt{3}$

Bibliografia

Hassan, S.; Iezzi, G. *Seqüências, matrizes, determinantes, sistemas*. Col. Fundamentos da Matemática Elementar, vol 4.

Iezzi, G. *Geometria analítica*. Col. Fundamentos da Matemática Elementar, vol 7.

Lima, E. L. *Coordenadas no plano*. Col. do Professor de Matemática da SBM.

Lima, E. L. *Coordenadas no espaço*. Col. do Professor de Matemática da SBM.

Boulos, P.; Oliveira, I. C. *Geometria analítica, um tratamento vetorial*. McGraw-Hill, 1986.

Sobre a autora

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão

Docente aposentada do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, onde fez graduação, mestrado e doutorado. É docente dos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade de Mogi das Cruzes (UMC) e do Centro Universitário FIEO (UNIFIEO) e conferencista convidada do curso de Especialização em História da Matemática do Centro de Extensão Universitária.