Matemática

Funções e gráficos

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro

Elaborador
Antônio Carlos Brolezzi

4
módulo

Nome do Aluno ______________________________

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Governador: *Geraldo Alckmin*

Secretaria de Estado da Educação de São Paulo

Secretário: *Gabriel Benedito Issac Chalita*

Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP

Coordenadora: *Sonia Maria Silva*

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: *Adolpho José Melfi*

Pró-Reitora de Graduação

Sonia Teresinha de Sousa Penin

Pró-Reitor de Cultura e Extensão Universitária

Adilson Avansi Abreu

FUNDAÇÃO DE APOIO À FACULDADE DE EDUCAÇÃO – FAFE

Presidente do Conselho Curador: *Selma Garrido Pimenta*

Diretoria Administrativa: *Anna Maria Pessoa de Carvalho*

Diretoria Financeira: *Sílvia Luzia Frateschi Trivelato*

PROGRAMA PRÓ-UNIVERSITÁRIO

Coordenadora Geral: *Eleny Mitrulis*

Vice-coordenadora Geral: *Sonia Maria Vanzella Castellar*

Coordenadora Pedagógica: *Helena Coharik Chamlian*

Coordenadores de Área

Biologia:

Paulo Takeo Sano – Lyria Mori

Física:

Maurício Pietrocola – Nobuko Ueta

Geografia:

Sonia Maria Vanzella Castellar – Elvio Rodrigues Martins

História:

Kátia Maria Abud – Raquel Glezer

Língua Inglesa:

Anna Maria Carmagnani – Walkyria Monte Mór

Língua Portuguesa:

Maria Lúcia Victório de Oliveira Andrade – Neide Luzia de Rezende – Valdir Heitor Barzotto

Matemática:

Antônio Carlos Brolezzi – Elvia Mureb Sallum – Martha S. Monteiro

Química:

Maria Eunice Ribeiro Marcondes – Marcelo Giordan

Produção Editorial

Dreampix Comunicação

Revisão, diagramação, capa e projeto gráfico: *André Jun Nishizawa, Eduardo Higa Sokei, José Muniz Jr.*
Mariana Pimenta Coan, Mario Guimarães Mucida e *Wagner Shimabukuro*

Cartas ao Aluno

Carta da
Pró-Reitoria de Graduação

Caro aluno,

Com muita alegria, a Universidade de São Paulo, por meio de seus estudantes e de seus professores, participa dessa parceria com a Secretaria de Estado da Educação, oferecendo a você o que temos de melhor: conhecimento.

Conhecimento é a chave para o desenvolvimento das pessoas e das nações e freqüentar o ensino superior é a maneira mais efetiva de ampliar conhecimentos de forma sistemática e de se preparar para uma profissão.

Ingressar numa universidade de reconhecida qualidade e gratuita é o desejo de tantos jovens como você. Por isso, a USP, assim como outras universidades públicas, possui um vestibular tão concorrido. Para enfrentar tal concorrência, muitos alunos do ensino médio, inclusive os que estudam em escolas particulares de reconhecida qualidade, fazem cursinhos preparatórios, em geral de alto custo e inacessíveis à maioria dos alunos da escola pública.

O presente programa oferece a você a possibilidade de se preparar para enfrentar com melhores condições um vestibular, retomando aspectos fundamentais da programação do ensino médio. Espera-se, também, que essa revisão, orientada por objetivos educacionais, o auxilie a perceber com clareza o desenvolvimento pessoal que adquiriu ao longo da educação básica. Tomar posse da própria formação certamente lhe dará a segurança necessária para enfrentar qualquer situação de vida e de trabalho.

Enfrente com garra esse programa. Os próximos meses, até os exames em novembro, exigirão de sua parte muita disciplina e estudo diário. Os monitores e os professores da USP, em parceria com os professores de sua escola, estão se dedicando muito para ajudá-lo nessa travessia.

Em nome da comunidade USP, desejo-lhe, meu caro aluno, disposição e vigor para o presente desafio.

Sonia Teresinha de Sousa Penin.

Pró-Reitora de Graduação.

Carta da
Secretaria de Estado da Educação

Caro aluno,

Com a efetiva expansão e a crescente melhoria do ensino médio estadual, os desafios vivenciados por todos os jovens matriculados nas escolas da rede estadual de ensino, no momento de ingressar nas universidades públicas, vêm se inserindo, ao longo dos anos, num contexto aparentemente contraditório.

Se de um lado nota-se um gradual aumento no percentual dos jovens aprovados nos exames vestibulares da Fuvest — o que, indubitavelmente, comprova a qualidade dos estudos públicos oferecidos —, de outro mostra quão desiguais têm sido as condições apresentadas pelos alunos ao concluírem a última etapa da educação básica.

Diante dessa realidade, e com o objetivo de assegurar a esses alunos o patamar de formação básica necessário ao restabelecimento da igualdade de direitos demandados pela continuidade de estudos em nível superior, a Secretaria de Estado da Educação assumiu, em 2004, o compromisso de abrir, no programa denominado Pró-Universitário, 5.000 vagas para alunos matriculados na terceira série do curso regular do ensino médio. É uma proposta de trabalho que busca ampliar e diversificar as oportunidades de aprendizagem de novos conhecimentos e conteúdos de modo a instrumentalizar o aluno para uma efetiva inserção no mundo acadêmico. Tal proposta pedagógica buscará contemplar as diferentes disciplinas do currículo do ensino médio mediante material didático especialmente construído para esse fim.

O Programa não só quer encorajar você, aluno da escola pública, a participar do exame seletivo de ingresso no ensino público superior, como espera se constituir em um efetivo canal interativo entre a escola de ensino médio e a universidade. Num processo de contribuições mútuas, rico e diversificado em subsídios, essa parceria poderá, no caso da estadual paulista, contribuir para o aperfeiçoamento de seu currículo, organização e formação de docentes.

Prof. Sonia Maria Silva

Coordenadora da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas

Apresentação da área

> [...] a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós. […] Assim é necessário colocar a ênfase:
>
> — em procurar soluções e não apenas em memorizar procedimentos;
> — em explorar modelos e não apenas em memorizar fórmulas;
> — em formular conjecturas e não apenas em fazer exercícios.
>
> [...] com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.
>
> Schoenfeld (1992)[1]

Este curso de Matemática com duração de 4 meses está sendo oferecido a alunos do último ano do ensino médio da rede pública como um incentivo para continuarem seus estudos em direção ao ensino superior. Embora não cubra todo o programa do ensino médio, pretende-se estimular o interesse dos alunos pelos diversos temas de Matemática por meio de abordagens variadas.

Serão estudados tópicos sobre Números, Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória, Geometria Plana e Espacial, Geometria Analítica, Sistemas Lineares e Funções, privilegiando o entendimento das possíveis facetas de um mesmo assunto, a análise de resultados obtidos e a interligação entre os diversos conteúdos.

Escolhas foram feitas de modo a priorizar sua formação, a discussão de idéias e a percepção de que a Matemática é uma disciplina viva que pode ser construída, e não um amontoado de fórmulas prontas para serem decoradas e usadas. Lembrando que realmente aprendemos quando trabalhamos o conhecimento, analisando-o de várias maneiras e usando-o com critério, consideraremos, sempre que possível, aplicações em problemas reais e interdisciplinares.

Acreditando que o intercâmbio entre vocês, alunos do ensino médio, e os alunos da USP, que serão os seus professores, venha a aumentar a sua predisposição para o ensino superior, desejamos a todos **bons estudos**!

Coordenação da área de Matemática

---

[1]SCHOENFELD A. H. "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics". In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematicas teaching and learning*. p. 334-370. Nova Iorque: MacMillan, 1992.

Apresentação do módulo

Neste módulo estudaremos funções. O conceito de funções é um dos mais importantes em Matemática, e seu conhecimento impulsionou o desenvolvimento tecnológico em quase todas as áreas.

As funções permeiam nossa vida cotidiana mesmo que não tenhamos consciência disso. Por exemplo, o valor da conta de luz depende da quantidade de energia gasta, a dose de remédio que é dada a uma criança depende do seu peso, o valor para fazer cópias de um material depende do número de páginas copiadas. Usando funções, também se estudam o crescimento de bactérias, o movimento dos astros, a variação da temperatura da Terra etc. A noção de função nos permite, enfim, descrever e analisar relações de dependência entre quantidades.

Neste módulo estudaremos o que chamamos de *funções reais*, isto é, relações entre quantidades que podem ser descritas por números reais. Daremos ênfase ao tratamento gráfico das funções. Aprenderemos a relacionar informações algébricas (como equações e inequações) com as informações geométricas fornecidas por gráficos de funções. Também veremos a relação entre as simetrias e as transformações no gráfico e as correspondentes mudanças algébricas.

A linguagem gráfica permite entender melhor diversos fenômenos da natureza e está cada vez mais presente no nosso dia-a-dia, nas informações veiculadas pelos meios de comunicação (revistas, jornais, televisão etc.) ou nas formas de arte e diversão (como os jogos de computadores e os efeitos especiais para a arte cinematográfica). A própria paisagem urbana está cada vez mais influenciada pela linguagem gráfica, e a matemática aparece aos olhos de quem observa as regularidades das construções arquitetônicas e a decoração dos ambientes.

Como vimos no módulo anterior, a Geometria permite ligar matemática e arte. Neste módulo, desenvolveremos outra parte da Matemática que também pode ser associada à arte. Nossa opção foi tratar o tema *funções* chamando a atenção para a importância da linguagem gráfica, levando em consideração a possibilidade de compreender a manipulação dos gráficos fazendo uso de simetrias e transformações.

Unidade 1

Funções e simetrias

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaborador
Antônio Carlos Brolezzi

Representação de funções

Afinal, o que são funções? Uma função descreve as mudanças sofridas por uma grandeza provocadas pela variação de outra. Quando conhecemos uma função, temos algum tipo de descrição da maneira como uma grandeza varia dependendo da variação de outra. Matematicamente, dizemos que uma função é uma relação entre os elementos de dois conjuntos, em que para cada elemento de um conjunto é associado apenas um elemento do outro conjunto.

Normalmente escrevemos $f : D \to B$ para informar que f leva os elementos do conjunto D em elementos do conjunto B. Chamamos o conjunto origem D de *domínio* de f, ou seja, o conjunto dos valores que a variável independente de f pode assumir. Quando o conjunto D não é explicitado, convenciona-se tomar o maior subconjunto possível para o qual f está definida. O conjunto B é o chamado *contradomínio* de f, e é lá que a função f identifica os possíveis valores para a variável dependente. Já o conjunto $f(D)$, constituído de todos os possíveis valores de $f(x)$ para $x \in D$, é chamado de imagem de f. Essa denominação é bastante gráfica, pois se D e B forem subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ a imagem de f é a projeção do gráfico de f sobre o eixo das ordenadas (veja uma possível ilustração na Figura 2).

Há várias formas de descrever como essa correspondência é feita. Essa descrição pode ser verbal, feita por meio de um texto que explica como as variáveis se relacionam, ou por meio de uma tabela, mostrando alguns valores significativos que a variável dependente assume conforme o valor da variável independente. Além disso, uma função pode ser representada por meio de uma fórmula matemática, ou então por meio de um desenho ou gráfico.

A idéia de desenhar o comportamento das funções em um plano está associada à necessidade de representar figuras tendo alguma referência espacial. Com o uso dessa representação, passou-se a utilizar um plano com duas retas graduadas ortogonais destacadas, uma para representar os valores de x e outra os valores de y. Ou seja, para cada ponto P, precisamos ter um par de números indicando sua posição: o número x, que inicialmente era chamado de "corte" do ponto P, e depois ficou conhecido como *abscissa* (do latim "cortar"); e um segundo número y (conhecido como *ordenada*). Os termos *abscissa*, *ordenada* e *coordenadas* foram usados pela primeira vez por Leibniz em 1692.

Uma função real f associa, a cada número x de um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ um único número real y. Representamos essa associação por $y = f(x)$. Lemos assim: "y é igual a f de x", ou "y é função de x". Chamamos x e y de variáveis, pois podem ocupar valores numéricos diversos. É possível utilizar quaisquer letras para as variáveis. É comum utilizarem-se a letra x para variável independente e y para variável dependente. Dizemos, assim, que o valor de x determina o valor para y. Por exemplo, o perímetro de um quadrado depende do lado do quadrado. Se chamarmos o lado de x e o perímetro de y, temos $y = 4x$.

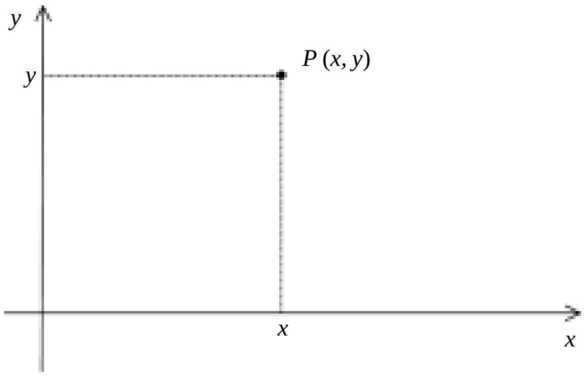


Figura 1. O ponto P no plano cartesiano.

O plano para representar posições recebeu posteriormente o nome de *plano cartesiano*, em homenagem a Descartes, que em 1637 teve a idéia de tratar as curvas geométricas por meio de expressões algébricas, originando assim a *Geometria Analítica*, que você verá com mais detalhes no Módulo 6. No plano cartesiano, as duas retas de referência recebem o nome de eixos coordenados, como na Figura 1.

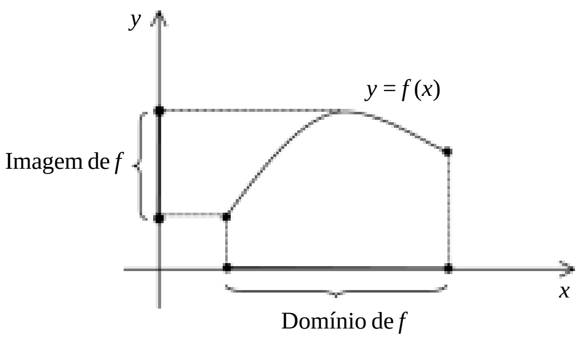


Figura 2. Ilustração de possível condição de domínio e imagem de uma função f.

Vejamos agora um exemplo de uma função representada de diversas formas:

a) Registro verbal:

Uma formiga se move sobre uma régua em linha reta na direção crescente dos centímetros, com velocidade constante de 2 cm por segundo. Supondo que, quando começamos a observar a formiga, ela se encontra a 4 cm da origem, onde ela estará após 5 segundos?

b) Tabela:

Tempo (em segundos)	Posição (em centímetros)
0	4
1	6
2	8
3	10
4	12
...	...

Dizemos que o gráfico de uma função é o conjunto definido por todos os pares ordenados $(x, f(x))$ tais que x está no domínio de f. Ao escrever, por exemplo, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ queremos dizer que a função f relaciona elementos do conjunto dos número reais $\mathbb{R}$. Você verá adiante que, por exemplo, se $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ for definida por $f(x) = \sqrt{x}$, então o domínio de f neste caso são os reais positivos (que representamos por $\mathbb{R}_+$). O contradomínio é o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), e a imagem é $\mathbb{R}_+$, pois o símbolo $\sqrt{\ }$ sempre indica a raiz quadrada positiva de um número real. (Veja mais sobre a função raiz quadrada na Unidade 3 deste Módulo.)

O filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm von Leibniz nasceu em 1º de julho de 1646 e faleceu em 14 de novembro de 1716. Foi um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral, e ajudou a desenvolver a linguagem das funções.

c) Fórmula algébrica:

Chamando de t o tempo de percurso da formiga e de S sua posição, temos que para o valor $t = 0$ s, a formiga está na posição $S = 4$ cm. A cada segundo, somam-se 2 cm à sua posição. Assim, para $t = 1$ s, temos $S = 2 + 4 = 6$ cm. Para $t = 2$ s, temos $S = 2 \times 2 + 4 = 8$ cm. Generalizando esse procedimento, vemos que a fórmula para o deslocamento da formiga é:

$S = 2t + 4$

d) Gráfico:

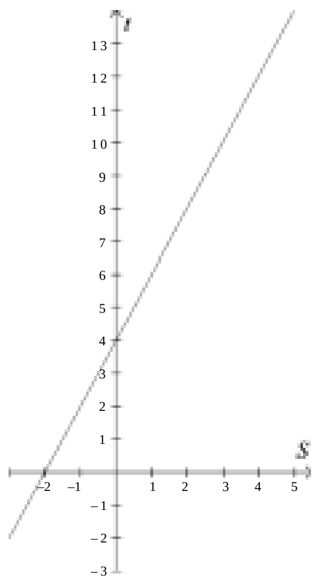


Figura 3. Gráfico de *S* em função de *t*

No caso, podemos obter o valor desejado: após 5 s de passeio a formiga está na posição 12 cm.

Observe que a linguagem gráfica às vezes pode trazer informação adicional. No caso da formiga, não foi informado o que ocorria antes de começarmos a observar, ou seja, no tempo "negativo" que veio antes do início da observação (ou o que viria depois da observação). Além disso, se a informação fosse só a fornecida pela tabela, não teríamos condições de saber exatamente qual é a função. Existem situações em que não é possível obter determinada representação para uma dada função. Em outras situações, pode ocorrer que uma certa representação seja muito mais útil que as demais. Por isso é importante conhecer todas.

René Descartes foi um filósofo e matemático francês que nasceu em 31 de março de 1596 (em uma cidade que hoje se chama Descartes) e faleceu em 11 de fevereiro de 1650. Pai da chamada Filosofia Moderna, foi um dos criadores da Geometria Analítica, juntamente com o também francês Pierre de Fermat (1601-1665).

Simetrias: translação, rotação, reflexão

Encontramos vários exemplos de figuras simétricas na natureza. Muitos seres vivos têm uma configuração simétrica. Uma idéia de figuras simétricas é a encontrada nas gravuras abaixo. Se dobrarmos a folha de papel ao longo das retas tracejadas, a figura se sobrepõe. Estas retas são chamadas de *eixos de simetria*. Muitas vezes nem percebemos, mas há várias figuras simétricas na natureza. Veja os eixos de simetria indicados abaixo.

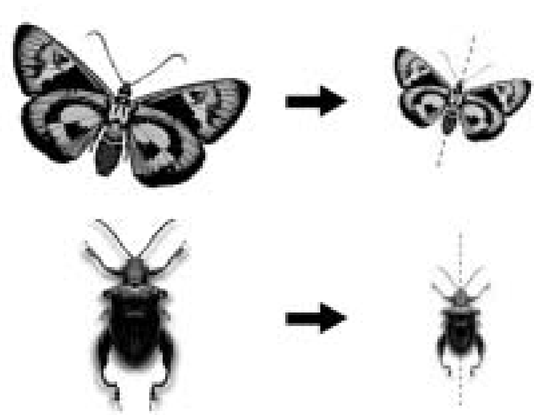


Figura 4. Observando eixos de simetria especular.

Esse tipo de simetria é chamado de especular, por lembrar a reflexão do espelho. Há outras formas de simetria que são bastante interessantes. Para isso vamos pensar um pouco nos movimentos que podemos fazer com uma figura em um plano.

Podemos definir uma *transformação geométrica* em um plano como uma correspondência um a um entre pontos do plano. Assim, por meio de uma transformação, os pontos de uma dada figura no plano correspondem a uma outra figura (sua imagem) no mesmo plano. As transformações que não alteram as distâncias entre os pontos relacionam figuras congruentes, e são ditas *transformações isométricas*. Por não distorcer as imagens, essas transformações são chamadas de movimentos rígidos no plano. As transformações isométricas de um plano são *translação*, *reflexão* e *rotação*, e todas as combinações entre esses movimentos.

Translação é a transformação em que todos os pontos de uma figura se deslocam numa mesma direção, sentido e de uma mesma distância. Essa direção pode ser horizontal, vertical ou uma combinação delas.

Reflexão em relação a alguma reta m, que pode ser chamada de eixo de reflexão ou de simetria, é a transformação que a cada ponto *P* associa o seu simétrico *P'* em relação a *m*, isto é, *m* é a mediatriz do segmento *PP'*. Se dobrarmos a folha de papel ao longo de *m*, os pontos *P* e *P'* se sobrepõe.

Rotação é o giro da figura em torno de algum ponto e de um determinado ângulo.

Veja exemplos de transformações sobre o desenho da figura abaixo:

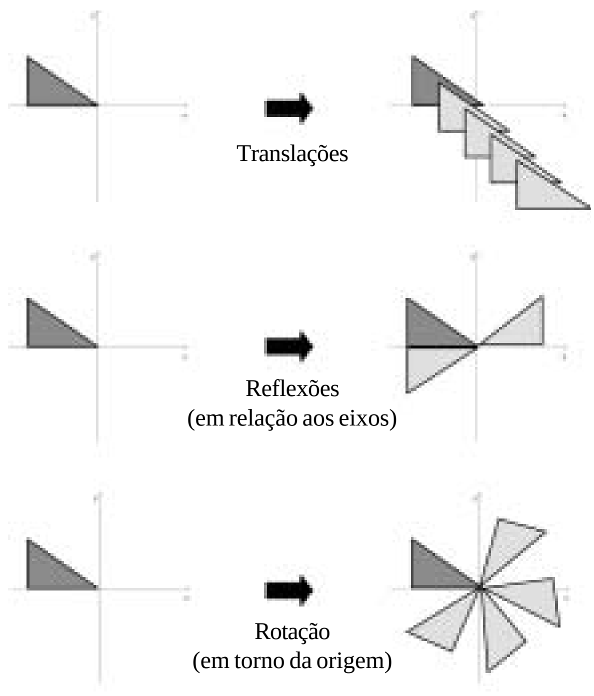


Figura 5. Os movimentos rígidos.

Esses movimentos, bem como suas combinações, geram padrões que são muito utilizados na arte, na arquitetura e na decoração. Considerar esses movimentos no plano pode ser útil para compreendermos as funções matemáticas. Por outro lado, as funções podem nos ajudar a compreender e representar melhor essas e outras transformações.

O prefixo *iso* significa igual; portanto, *transformações isométricas* são aquelas que mantém as distâncias entre os pontos.

Maurits Cornelis Escher (1898-1972), nascido na Holanda, foi um dos artistas gráficos mais famosos do mundo e produziu mais de 2.500 desenhos e outras formas de arte que representam demonstrações do potencial artístico da Matemática. Jogando com simetrias, transformações e perspectivas, seus desenhos são intrigantes e maravilham o olhar humano, criando ilusões e um mundo fantástico de formas (veja mais em *www.mcescher.com*).

Para mim, permanece uma questão em aberto se [esta obra] pertence ao reino da matemática ou da arte.

M.C. Escher

Desenhando com funções

Os quatro quadrantes em que um plano cartesiano fica dividido por seus dois eixos oferecem várias oportunidades de aplicar a idéia de transformações a desenhos de funções. Para entender como funciona, vamos pensar em um ponto P representado por um par (x,y). Se os números x e y forem positivos não nulos, então o ponto está representado no primeiro quadrante. O que ocorre se tomarmos o ponto Q representado pelo par $(-x,y)$? O ponto terá a mesma ordenada y que o ponto P, mas vai ocupar o lugar simétrico ao ponto P em relação ao eixo y. Se tomarmos o ponto T $(x,-y)$, esse ponto é simétrico a P em relação ao eixo x. Já um ponto S $(-x,-y)$ está no terceiro quadrante. Ele pode ser obtido a partir de P por meio de uma rotação em torno da origem (0,0) e de ângulo 180°. Note que S pode também ser obtido a partir de P por duas sucessivas reflexões em relação aos eixos coordenados. Veja a ilustração abaixo:

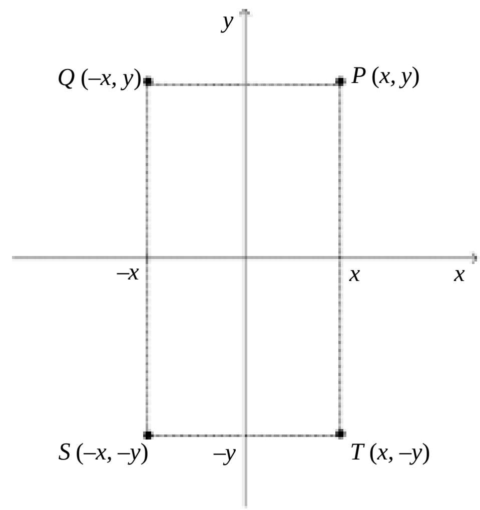


Figura 7. Posições relativas entre pontos no plano cartesiano.

Estas mesmas relações podem ser empregadas quando fazemos algumas operações com a função ou com a variável independente. Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui uma representação gráfica como segue, vejamos o que ocorre quando tomamos $y = f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, e $y = -f(-x)$.

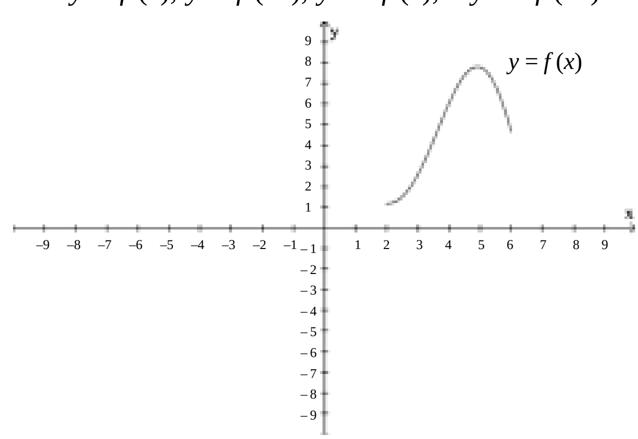


Figura 8. Gráfico de uma função $y = f(x)$.

Observe a figura abaixo. Nela estão desenhados os gráficos de $y = f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, e $y = -f(-x)$. Em cada gráfico identifique o domínio e a imagem, observando as alterações em comparação ao domínio e imagem de $y = f(x)$.

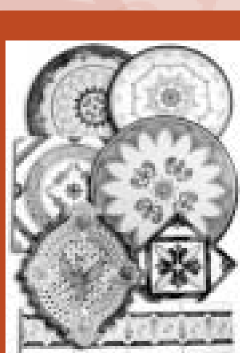


Figura 6: Objetos decorativos nos quais são visíveis movimentos rígidos (*www.sgarlata.it*)

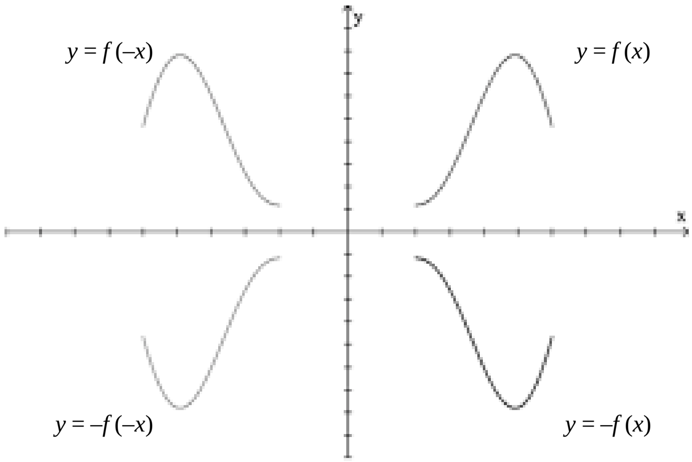


Figura 9. Gráfico de $y = f(x)$ e simetrias por espelhamento em torno dos eixos.

Dado o gráfico de uma função, podemos fazer translações, rotações e reflexões. Você verá exemplos disso ao estudar algumas funções específicas neste módulo. O que ocorre com o gráfico de uma função se somamos ou subtraímos a ela uma constante? Em $y = f(x)$, se somamos ou subtraímos uma constante à variável dependente y, faremos seu gráfico deslocar-se pelo plano cartesiano. Observe o desenho abaixo e tire suas conclusões.

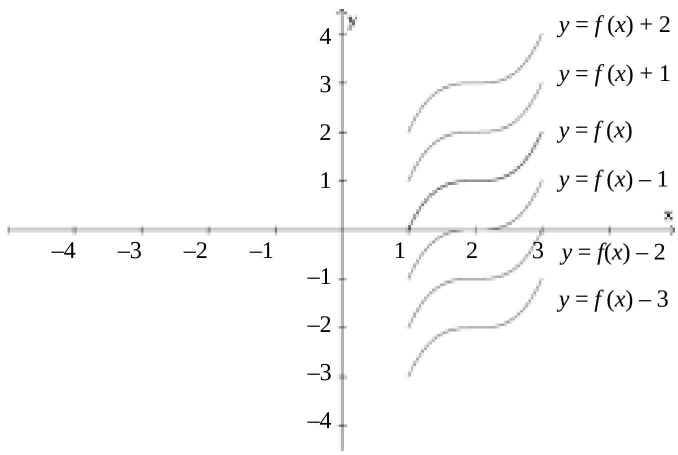


Figura 10. Gráfico de $y = f(x)$ e translações verticais.

Observe agora o que ocorre quando somamos ou subtraímos uma constante à variável independente em $y = f(x)$. Tire suas conclusões.

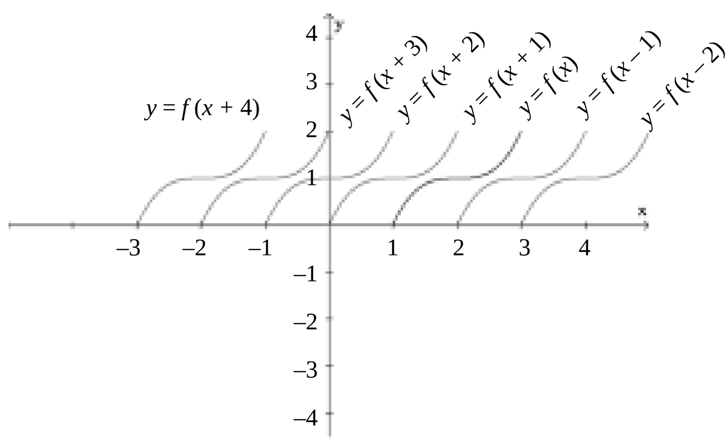


Figura 11. Gráfico de $y = f(x)$ e translações horizontais.

Agora faça você:

Dado o desenho de $y = f(x)$ abaixo, diga o que deve ser feito com $f(x)$ para obter a função $g(x)$, cujo desenho é dado. Explicite os domínios e imagens de cada uma das funções envolvidas.

a)

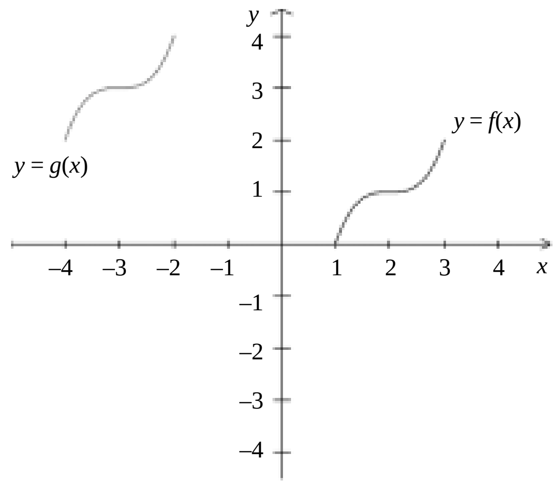


Figura 12. Obter as transformações de $f(x)$ para obter g(x).

b)

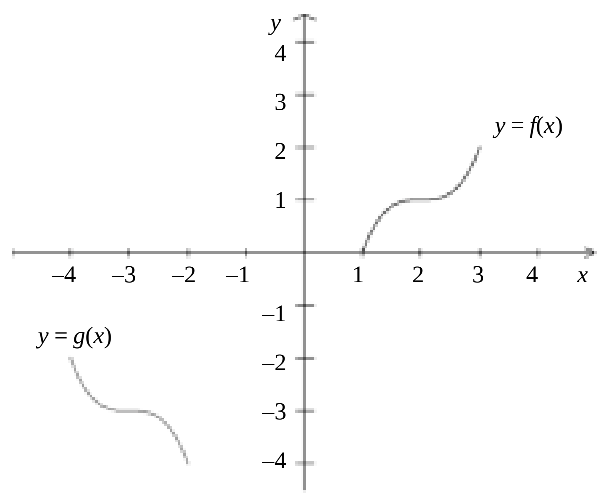


Figura 13. Obter as transformações de $f(x)$ para obter g(x).

Na mesma linha de raciocínio, podemos analisar o efeito de multiplicar, em $y = f(x)$, a variável independente ou a variável dependente por uma constante não nula. Isso será feito ao estudarmos o comportamento de funções específicas, que veremos em seguida. Nas unidades seguintes, estudaremos algumas funções importantes, conhecer seus gráficos e aprender a relacionar alterações nos coeficientes das expressão de cada função com as alterações em seu gráfico.

Unidade 2

Retas e parábolas

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaborador
Antônio Carlos Brolezzi

Desenhando retas: as funções polinomiais do primeiro grau

Uma função polinomial de primeiro grau é da forma $y = ax + b$, onde a e b são constantes, x é a variável independente, y é a variável dependente e $a \neq 0$.

Observemos que, se $a = 0$, temos $y = b$, que é uma função constante. O gráfico de $y = b$ é uma reta horizontal, ou seja, uma reta paralela ao eixo das abscissas, pois para qualquer valor de x, o valor de y é sempre o mesmo: b. Nesse caso, a função $y = b$ é uma função polinomial de grau zero.

Quando $a \neq 0$, o gráfico de $y = ax + b$ é uma reta não horizontal mas também não vertical – lembre que uma reta vertical não pode ser gráfico de uma função.

Vamos entender porque o gráfico de $y = ax + b$ é uma reta.

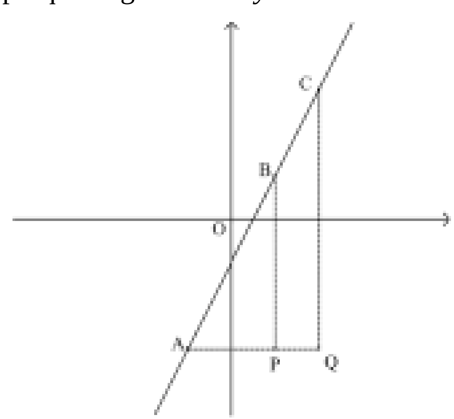


Figura 14. Quaisquer três pontos são alinhados.

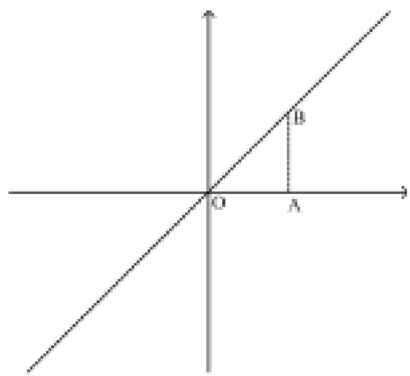
Seja A = (x_A, y_A) um ponto do gráfico, isto é, de $y_A = ax_A + b$. Se B = (x_B, y_B) e C = (x_C, y_C) são outros dois pontos do gráfico não coincidentes e distintos de A, temos: $y_B = ax_B + b$ e $y_C = ax_C + b$. É preciso observar que, em se tratando de três pontos distintos do gráfico de uma função, as abscissas de A, B e C são duas a duas distintas. Então, temos:

- a partir de $y_A = ax_A + b$ e $y_B = ax_B + b$: $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$, ou seja, $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
- a partir de $y_A = ax_A + b$ e $y_C = ax_C + b$: $y_C - y_A = a(x_C - x_A)$, ou seja, $a = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$.

Assim, na figura acima, observamos que os triângulos ABP e ACQ são semelhantes pelo caso LAL de semelhança, pois possuem um ângulo reto e os lados adjacentes a esse ângulo respectivamente proporcionais, já que $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$. Dessa maneira, o ângulo de vértice no ponto A no primeiro triângulo é congruente ao ângulo de vértice no ponto A no segundo triângulo, ou seja, o ponto C está alinhado com os pontos A e B. A reta que contém esses pontos é aquela cujo coeficiente angular é precisamente *a*, que é a medida da tangente trigonométrica do ângulo de inclinação a da reta – ângulo que a reta forma com o semi-eixo horizontal positivo. Por quê? Justifique.

Uma vez que o raciocínio feito para A, B e C pode ser repetido para qualquer ponto do gráfico da função $y = ax + b$, concluímos que o gráfico é, de fato, uma reta.

A partir do gráfico da função mais simples desse tipo, que é $y = x$, podemos entender o gráfico de qualquer outra função desse mesmo tipo.



Para cada valor de *x*, o valor da variável dependente *y* é igual a *x*. Dessa maneira, o triângulo OAB é retângulo e isósceles e, portanto, o ângulo BÔA tem 45º, ou seja, a reta que passa por O e B é a bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes

Figura 15. O gráfico da função $y = x$

Consideremos agora o caso de $y = ax$ com $a \neq 0$.

Primeiramente, se $a > 0$, e fazendo $a = 1$, $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$, por exemplo, observe na figura abaixo: para cada valor não nulo da abscissa *x*, o valor da ordenada correspondente é, respectivamente, x, $2x$, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$. Além disso, para $x = 0$ temos sempre $y = 0$, o que significa que todas essas retas passam pela origem.

Dessa maneira, variando o coeficiente $a > 0$ em $y = ax$, observamos que o ângulo de inclinação da reta varia: se $a > 1$, o ângulo é maior que 45º; se $0 < a < 1$, o ângulo é menor que 45º.

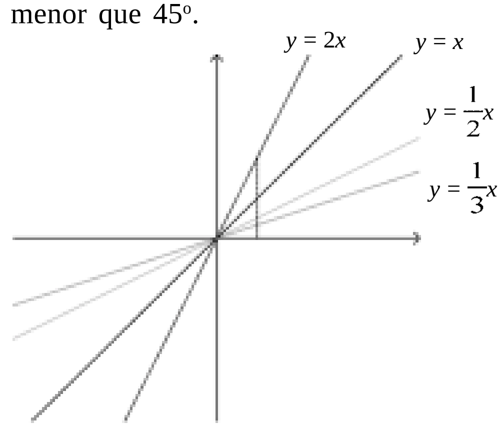


Figura 16. Gráfico de funções do tipo $y = ax$ com $a > 0$.

Se o coeficiente a é negativo, o raciocínio é semelhante. Examinamos inicialmente o caso em que $a = -1$. O gráfico de é a reflexão do gráfico de $y = x$ com relação ao eixo horizontal.

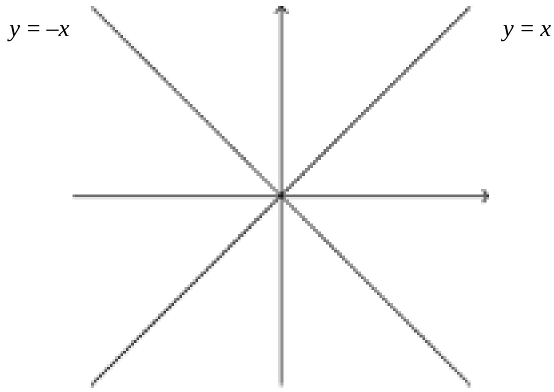


Figura 17. Os gráficos das funções $y = x$ e $y = -x$.

Novamente, se $a < 0$, observe na figura abaixo, onde $a = -1$, $a = -2$, $a = -\frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{3}$: para cada valor não nulo da abscissa x, o valor da ordenada correspondente é, respectivamente, $-x$, $-2x$, $-\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{3}x$. Além disso, como antes, para $x = 0$ temos sempre $y = 0$, o que significa que todas essas retas passam pela origem.

Dessa maneira, o coeficiente $a < 0$ em $y = ax$ também faz mudar o ângulo de inclinação da reta: se $a < -1$, temos a reta numa posição mais próxima da vertical; se $-1 < a < 0$, a reta se encontra numa posição mais próxima da horizontal.

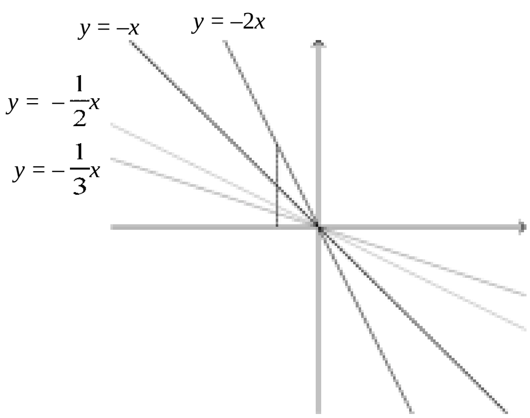


Figura 18. Gráfico de funções do tipo $y = ax$ com $a < 0$.

Observe que o gráfico de cada uma dessas funções é simétrico relativamente ao eixo x, ao da função que tem o mesmo coeficiente, mas com sinal positivo, na Figura 16.

Uma vez entendida a ação do coeficiente a, precisamos entender qual o papel do coeficiente b na equação $y = ax + b$.

Basta observar um caso simples e, a partir daí, a generalização é imediata.

De fato, comparando os gráficos de $y = x$ e de $y = x + 1$, observamos que, ao fazer o segundo gráfico, para um mesmo valor de x a ordenada foi acrescida de uma unidade quando comparada àquela do ponto correspondente no gráfico de $y = x$. Por isso, no gráfico de $y = x + 1$ ocorreu uma translação vertical de uma unidade quando comparado ao gráfico de .

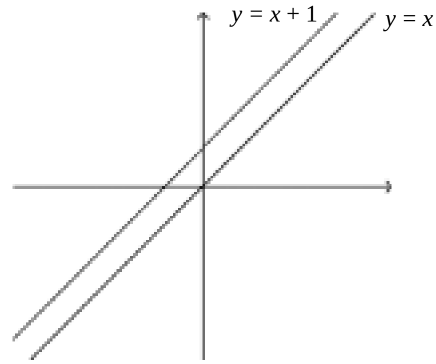


Figura 19. Os gráficos das funções $y = x$ e $y = x + 1$.

Para qualquer outro valor do coeficiente b acontece algo análogo: se b > 0 há uma translação vertical para cima; se b < 0 há uma translação vertical para baixo.

Assim, para obter o gráfico, por exemplo, da função $y = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$, fazemos vários gráficos intermediários a fim de entender os movimentos ocorridos, a partir do gráfico de $y = x$.

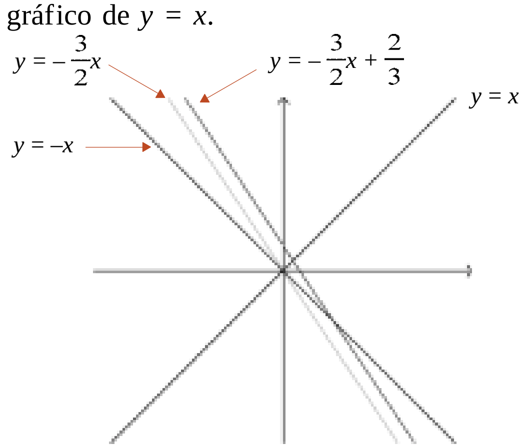


Figura 20. O gráfico da função $y = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$ a partir do gráfico de $y = x$.

Agora faça você:

Esboce os gráficos de:

a) $y = \frac{3}{5}x - 2$

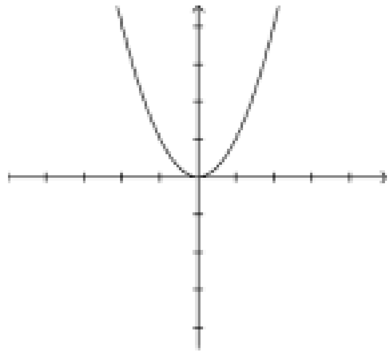
b) $y = -\frac{8}{7}x + \frac{1}{3}$,

a partir do gráfico de $y = x$.

Desenhando parábolas: as funções polinomiais do segundo grau

A função polinomial do segundo grau, ou função quadrática, mais simples, é dada pela expressão $y = x^2$ e tem por gráfico uma curva denominada parábola[1]. Como sempre, x é a variável independente e y é a variável dependente.

1. Uma parábola é uma curva especial, que pode ser obtida através de uma determinada secção da superfície de um cone. Estuda-se esse assunto em Geometria Analítica. Entretanto, mais adiante, neste mesmo módulo, vamos detalhar alguns aspectos desse tipo de curva.



O ponto dado pelo par ordenado (0,0) denomina-se vértice da parábola $y = x^2$

Figura 21. O gráfico da função $y = x^2$.

A partir do gráfico dessa função, podemos entender o gráfico de qualquer função polinomial do segundo grau, dada por $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes, sendo que a é não nulo. O que acontece se o coeficiente a é zero?

Entretanto, como veremos a seguir, precisamos escrever a função num outro formato: $y = a(x + m)^2$, onde a, m e k são constantes, a $\neq$ 0, que se relacionam com a, b e c, dados inicialmente, o que também será detalhado mais adiante.

Como fizemos no caso das funções de primeiro grau, vamos entender primeiro qual é a ação do coeficiente a. Para tanto, vamos examinar o caso das funções do tipo $y = ax^2$, com a $\neq$ 0.

Primeiramente, se $a > 0$, observe na figura abaixo: para cada valor não nulo da abscissa x, o valor da ordenada correspondente é, respectivamente, x^2, $2x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^2$. Além disso, para $x = 0$ temos sempre $x = 0$, o que significa que todas as curvas passam pela origem.

Dessa maneira, o coeficiente $a > 0$ em $y = ax^2$ faz mudar o ângulo de inclinação da curva[2]: se $a > 1$, o ângulo aumenta (a parábola fica mais "fechada"), se $0 < a < 1$, o ângulo diminui (a parábola fica mais "aberta").

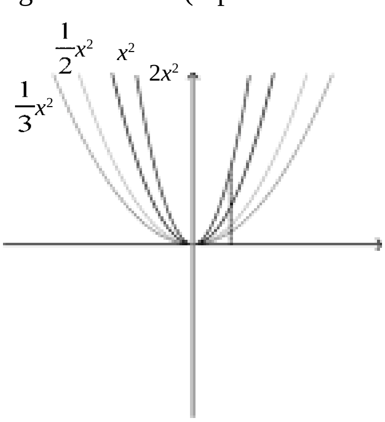


Figura 22. Gráfico de funções do tipo $y = ax^2$ com $a > 0$.

Se o coeficiente a é negativo, a situação é, de certa maneira, semelhante. Examinemos inicialmente o caso em que $a = -1$. O gráfico de $y = -x^2$ é a reflexão do gráfico de $y = x^2$ com relação ao eixo horizontal. Por quê?

2. O ângulo de inclinação de uma curva num ponto é o ângulo de inclinação da reta tangente à curva nesse ponto.

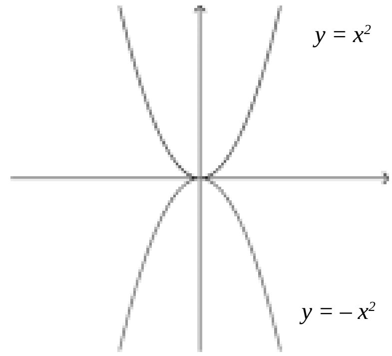


Figura 23. Os gráficos das funções $y = x^2$ e $y = -x^2$.

Também agora, se $a < 0$, observe na figura abaixo: para cada valor não nulo da abscissa x, o valor da ordenada correspondente é, respectivamente, $-x^2$, $-2x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$, $-\frac{1}{3}x^2$. Além disso, como antes, para $x = 0$ temos sempre $y = 0$, o que significa que todas as curvas passam pela origem.

Dessa maneira, o coeficiente $a < 0$ em $y = ax^2$, como antes, faz mudar o ângulo de inclinação da curva: se $a < -1$, a parábola fica mais "fechada", se $-1 < a < 0$, a parábola fica mais "aberta".

O ponto dado pelo par ordenado $(0, 0)$ é o vértice da parábola $y = ax^2$, para todo $a < 0$.

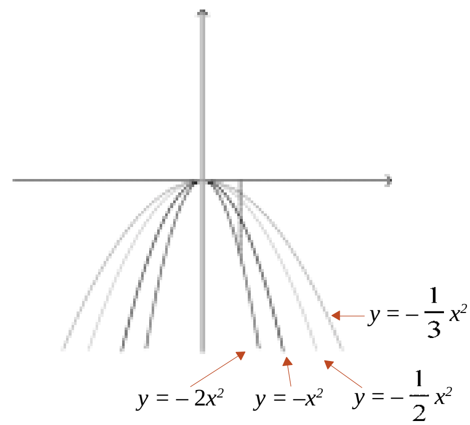


Figura 24. Gráfico de funções do tipo $y = ax^2$ com $a < 0$

Vamos agora analisar o caso de funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$. Para tanto, na figura abaixo estão os gráficos de funções desse tipo para alguns possíveis valores de k.

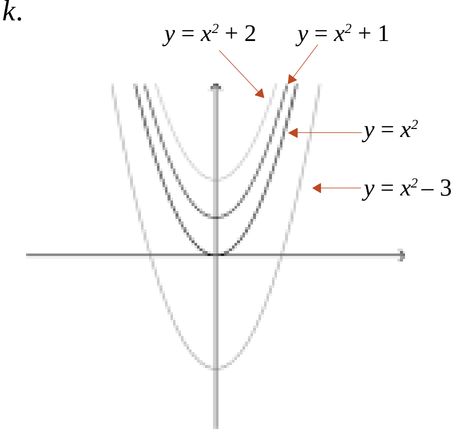


Figura 25. Gráfico de funções do tipo $y = ax^2 + k$ para diferentes valores de k.

Novamente, basta observar um caso simples e, a partir daí, a generalização é imediata.

De fato, comparando os gráficos de $y = x^2$ e de $y = x^2 + 1$, observamos que no segundo gráfico ocorreu uma translação vertical de uma unidade, pois para um mesmo valor de x, a ordenada do ponto, no segundo gráfico, foi acrescida de uma unidade quando comparada àquela do ponto correspondente no gráfico de $y = x^2$.

Para qualquer outro valor do coeficiente k acontece algo análogo: se $k > 0$ há uma translação vertical para cima; se $k < 0$ há uma translação vertical para baixo. Qual é o vértice de uma parábola dada por $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$?

Analisemos agora o caso da função $y = a(x + m)^2$, $a \neq 0$. Vamos examinar os gráficos das funções $y = x^2$, $y = (x + 1)^2$ e $y = (x - 2)^2$, pois o entendimento de casos particulares vai nos levar imediatamente à generalização necessária.

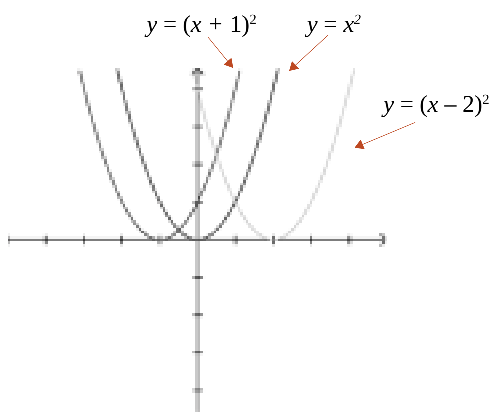


Figura 26. Gráfico de funções do tipo $y = a(x + m)^2$ para alguns valores de m.

É preciso observar que em $y = (x + 1)^2$ o valor $x = -1$ exerce o mesmo papel que $x = 0$ em $y = x^2$, que é o de zerar a variável dependente y. O mesmo acontece com $x = 2$ em $y = (x - 2)^2$. Uma análise relativa a todos os outros valores das abscissas nos mostram que o gráfico de $y = (x + 1)^2$ sofreu uma translação horizontal de -1 unidade (isto é, de uma unidade para a esquerda), enquanto que o gráfico de $y = (x - 2)^2$ sofreu uma translação horizontal de duas unidades (ou seja, de duas unidades para a direita) quando comparados ao gráfico da função mais simples $y = x^2$.

Evidentemente, para qualquer outro valor de m, a análise é semelhante.

Vejamos então como fazer o gráfico de, por exemplo, $y = 3\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2$, fazendo os vários gráficos intermediários a fim de entender os movimentos ocorridos, a partir do gráfico de $y = x^2$.

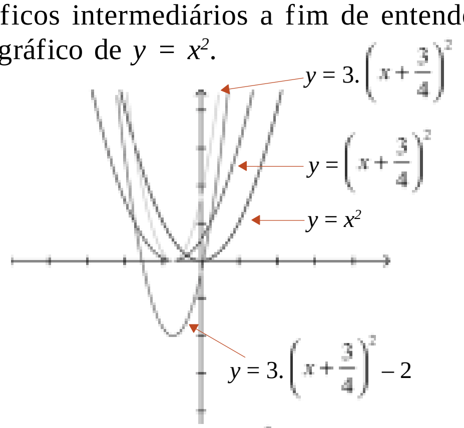


Figura 27. O gráfico da função $y = 3\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2$ a partir do gráfico de $y = x^2$.

É preciso observar que primeiro construímos o gráfico da função mais simples $y = x^2$; em seguida, o gráfico de $y = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ no qual observamos a translação horizontal de $-\frac{3}{4}$; depois o gráfico de $y = 3.\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ onde é possível visualizar a mudança de inclinação da curva provocada pelo fator 3; finalmente, o gráfico de $y = 3.\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2$ com a translação vertical de –2. O vértice da parábola $y = 3.\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2$ é o ponto $\left(-\frac{3}{4}, -2\right)$.

Agora faça você:

1. Construa o gráfico de $y = -2(x - 1)^2 + \frac{2}{3}$ a partir do gráfico de $y = x^2$.

2. Invente outra função polinomial do segundo grau e peça para seu colega esboçar o gráfico. Reciprocamente, esboce o gráfico da função inventada por ele. Não esqueça de partir de $y = x^2$, a fim de entender a ação dos coeficientes nos movimentos do gráfico inicial.

Desenhos criativos

Os gráficos das funções permitem que você dê asas à imaginação! Por exemplo, as figuras abaixo foram criadas utilizando tão somente gráficos de funções quadráticas. Você pode, eventualmente, utilizar o *software Winplot*[3] como ajuda para resolver o problema:

3. O *Winplot* é um *software* livre, disponível, inclusive em português, no endereço: *http://math.exeter.edu/rparris*

Sabendo que as figuras abaixo são formadas apenas por arcos de parábolas, defina as funções e seus respectivos domínios, de modo a obter cada uma das figuras dadas.

a)

b)

Em seguida, para cada uma das duas máscaras, você é capaz de obter a figura simétrica em relação a um eixo vertical (e a um eixo horizontal) que não passe por ela? Em cada caso, defina as funções com seus domínios, cujos gráficos lhe permitem obter as reflexões realizadas.

Agora faça você

Invente figuras utilizando arcos de parábola ou segmentos de reta. Em seguida, defina as funções e seus respectivos domínios, de modo que através de seus gráficos seja possível obter a figura criada.

COORDENADAS DO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA: COMPLETANDO QUADRADOS

Como vimos, o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola cujo vértice é o ponto (0,0), enquanto que o gráfico de $y = 3.\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - 2$ é uma parábola cujo vértice é o ponto $\left(-\frac{3}{4},-2\right)$. Assim, quando a função quadrática está dada no formato em que são visíveis as translações horizontal e vertical em relação ao gráfico de $y = x^2$, automaticamente temos as coordenadas do vértice da parábola correspondente.

A questão toda está centrada no seguinte problema: dada uma função polinomial do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$, como é possível reescrevê-la de maneira tal que seu gráfico possa ser enxergado como resultado de movimentos realizados no gráfico de $y = x^2$?

Vejamos por meio de um exemplo inicial como é possível resolver esse problema.

Seja $y = x^2 - 4x + 5$. Essa expressão pode ser reescrita da seguinte maneira:

$y = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1$, pois $4x = 2 \,.\, x \,.\, 2$. Assim,

$y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$, de onde podemos observar a translação horizontal de duas unidades e a translação vertical de uma unidade, em comparação ao gráfico de $y = x^2$. Esboce o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 5$. Qual o vértice da parábola obtida?

Vejamos agora um exemplo um pouco mais “difícil”:

Seja $y = 3x^2 - 7x + 2$. Temos então: $y = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}\right)$.

Observamos que é possível escrever $\frac{7}{3}x = 2 \,.\, x \,.\, \frac{7}{6}$ e, portanto,

$y = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} - \frac{49}{36} + \frac{2}{3}\right)$ onde somamos e subtraímos $\frac{49}{36} = \left(\frac{7}{6}\right)^2$.

Logo, como $-\frac{49}{36} + \frac{2}{3} = -\frac{25}{36}$, temos:

$$Y = 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] = 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}$$

Dessa forma a função dada inicialmente pode ser escrita num outro formato: $y = 3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}$, no qual percebemos que, comparando com o gráfico de $y = x^2$, houve uma translação horizontal de $\frac{7}{6}$ e uma translação vertical de $-\frac{25}{12}$, além da mudança de inclinação provocada pelo fator 3.

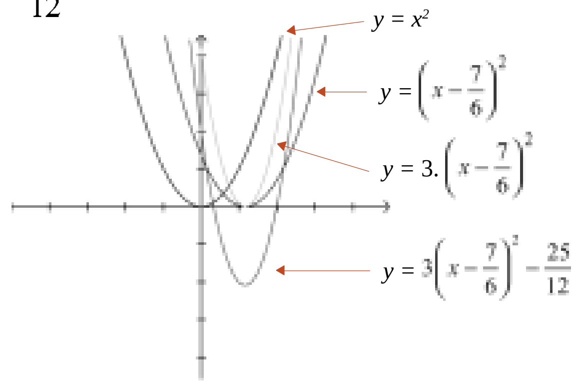


Figura 28. O gráfico de $y = 3x^2 - 7x + 2$ a partir do gráfico de $y = x^2$.

O processo desenvolvido é denominado completamento de quadrados, pois a grande questão foi a de obter o quadrado de uma soma ou de uma diferença. Completar quadrados é útil para escrever a expressão da função polinomial de segundo grau de maneira que a compreensão de seu gráfico a partir da função mais simples $y = x^2$ seja imediata, facilitando, em particular, a determinação das coordenadas do vértice da parábola, evitando a necessidade de decorar fórmulas.

A fim de resolver o problema geral colocado, precisamos fazer o mesmo cálculo, mas de maneira formal, com coeficientes literais.

Sendo $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

uma vez que o coeficiente a é certamente não nulo.

Como $\frac{b}{a}x = 2 . \frac{b}{2a} . x$, temos:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

pois somamos e subtraímos o termo $\frac{b^2}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Daí então, como $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$, temos:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right]$$

ou ainda,

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

É bom observar que as coordenadas do vértice estão automaticamente determinadas na última expressão escrita, além de estarem claramente explícitas as translações horizontal e vertical e a mudança de inclinação em relação ao gráfico da função mais simples $y = x^2$. Além disso, nessa última expressão é possível perceber a maneira pela qual se relacionam a, m e k com a, b e c, conforme havíamos anunciado. Escreva a, m e k em função de a, b e c!

Agora faça você:

Esboce o gráfico das funções, a partir do gráfico de $y = x^2$, completando quadrados:

a) $y = x^2 - 10x + 25$

b) $y = x^2 - 6x + 10$

c) $y = 2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 3x^2 - 10x + 5$

QUEM PRECISA DE FÓRMULAS?

Em Matemática, muitas vezes, você acaba decorando procedimentos e, portanto, regras ou fórmulas, de tanto utilizá-las. Mas esse não é o principal objetivo. Os raciocínios envolvidos, as estratégias utilizadas e os atalhos buscados envolvem criatividade e esperteza. E aí se encontra um interessante objetivo presente em qualquer curso de Matemática: resolver problemas tentando minimizar esforços, de maneira significativa.

A determinação das raízes de uma equação polinomial de segundo grau é exemplo de uma situação na qual o fato de saber uma fórmula decorada, sem significado, é desnecessário.

Observe que, completando quadrados, imediatamente é possível encontrar as raízes da equação.

Considere a equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Como vimos no exemplo anterior, após completar quadrados, $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{12}$. Isso significa que resolver a equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$ é o mesmo que resolver $3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} = 0$.

Da última equação podemos escrever:

$$3.\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{25}{12} \quad \text{ou} \quad \left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

de onde temos:

$$x - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{ou} \quad x - \frac{7}{6} = -\frac{5}{6}$$

ou seja, encontramos as duas raízes da equação inicial:

$$x = \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{6} + \frac{7}{6} = \frac{1}{3}$$

Naturalmente, o raciocínio pode ser generalizado para a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Verifique!

PARÁBOLAS[4] ATRAVÉS DE DOBRADURAS

Muito embora você estude as secções cônicas no contexto de Geometria Analítica, vamos propor aqui uma atividade interessante envolvendo as parábolas, já que as utilizamos amplamente. Essa atividade consiste na construção de uma parábola através de dobradura. É conveniente realizá-la em papel vegetal, por ser um papel que possui a consistência adequada.

4. Apesar de uma parábola ser uma curva que tem um formato bastante conhecido, existem outras curvas que têm um formato semelhante, mas não são parábolas. Por exemplo, o fio de telefone, quando não está perfeitamente esticado entre dois postes, não forma uma parábola, mas outra curva denominada catenária. Para decidir se uma dada curva é ou não uma parábola, é necessário verificar se seus pontos satisfazem a propriedade que define uma parábola.

5. Dizemos que uma reta *t* é tangente a uma parábola quando *t* encontra a parábola em um único ponto, deixando-a totalmente contida num dos dois semiplanos que *t* determina.

Definição de parábola:

Dados uma reta *d* e um ponto F não pertencente a *d*, a parábola é o lugar geométrico dos pontos T do plano que contém F e *d*, tais que a distância de T a F é igual à distância de T a *d*.

6. A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio. Equivalentemente, a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes dos extremos do segmento.

Em sua folha, desenhe uma reta e um ponto não pertencente a ela. Em seguida, dobre o papel de modo que o ponto fique sobre a reta; desdobre-o e dobre-o novamente com a mesma condição: o ponto deve ficar sobre a reta. Faça isso muitas vezes, até você encontrar o resultado esperado: a parábola construída por meio de suas tangentes[5].

Evidentemente, é preciso mostrar que de fato isso é verdade: ou seja, cada uma das retas construídas – as dobras – é uma reta tangente, isto é, possui um ponto que satisfaz a definição de parábola e esse é o único ponto da reta com tal propriedade.

i) Existe um ponto que satisfaz a definição de parábola

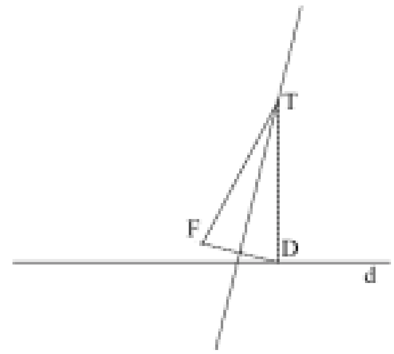


Figura 29. Existe um ponto da parábola na dobra.

Basta observar que a "dobra" é a mediatriz do segmento FD[6] e o ponto T é a intersecção da dobra com a perpendicular a *d* pelo ponto D. Sendo assim, pela congruência dos dois triângulos determinados, concluímos que os segmentos TF e TD são congruentes, logo T pertence à parábola.

ii) O ponto T é o único ponto que satisfaz a definição de parábola e que se encontra na "dobra".

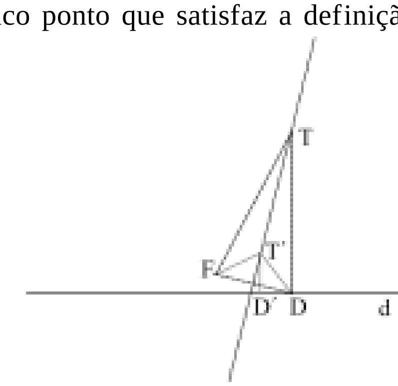


Figura 30. Existe um único ponto da parábola na dobra.

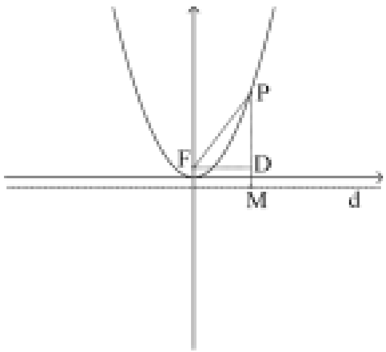
De fato, se existisse outro ponto T' na mesma "dobra", teríamos novamente que os segmentos T'F e T'D seriam congruentes pela definição de mediatriz. Mas T'D>T'D', pois T'D é a hipotenusa do triângulo retângulo T'D'D. Assim sendo, T' não pertence à parábola.

Examine a sua curva construída no papel vegetal. Observe que a reta dada inicialmente é a diretriz *d* e que o ponto dado é o foco F. Observe também que o vértice de sua parábola se encontra na reta perpendicular, traçada por F, à diretriz *d*. Mais uma observação importante é o fato de que essa perpendicular é justamente o eixo de simetria da parábola.

Como exemplo de determinação do foco e da diretriz do gráfico de uma função polinomial do segundo grau, utilizando não fórmulas decoradas, mas a definição de parábola, vamos examinar o caso de $y = x^2$.

Uma vez que o vértice da curva é o ponto O = (0, 0) – não esqueça que o vértice, sendo um ponto da curva, precisa satisfazer a propriedade que caracteriza a parábola – a fim de determinar o foco e a diretriz, vamos procurar um ponto F = (0, p) e uma reta $y = -p$, pois dessa forma a distância de O a essa reta é p, e a distância de O a F também é p. O parâmetro p precisa ser determinado a fim de encontrar F e d.

Para tanto, vamos impor a condição: a distância de qualquer ponto P = (x, y) da curva ao ponto F seja a mesma do que a distância do ponto P à reta diretriz d.



P = (x, y)
F = (0, p)
D = (x, $y - p$)
M = (x, $y + p$)
Logo, por Pitágoras, a distância de P a F é: $\sqrt{x^2 + (y-p)^2}$
e a distância de P a d é a medida de $\overline{PM}$, logo é: $y + p$.

Figura 31. O ponto P é eqüidistante do foco F e da diretriz *d*.

No triângulo retângulo PDF temos que a medida do cateto $\overline{PD}$ é $y - p$ e a medida do cateto $\overline{FD}$ é x. Logo, a medida da hipotenusa $\overline{FP}$, pelo Teorema de Pitágoras, é $\sqrt{x^2 + (y-p)^2}$, que é a distância de P a F.

Por outro lado, a distância de P à reta diretriz d é dada por $y + p$.

Impondo a condição de que P pertence a uma parábola, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$$

e daí, elevando ambos os membros ao quadrado,

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

e, portanto,

$$x^2 = 4py$$

isto é,

$$y = \frac{1}{4p}x^2$$

Como $y = x^2$, obtemos $\frac{1}{4p} = 1$, ou seja $p = \frac{1}{4}$.

Logo, o foco é o ponto F = $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ e a diretriz é a reta $y = -\frac{1}{4}$.

Agora faça você:

Determine o foco e a reta diretriz das parábolas dadas por:

a) $y = \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 2y$

b) $y = 3x^2$

c) $y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 1$

d) $y = 5x^2 - 4x + 1$

Sugestão: Desenhe o gráfico de cada função, partindo da função mais simples $y = x^2$.

Unidade 3

Algumas outras funções e seus gráficos

Organizadores
Antônio Carlos Brolezzi
Elvia Mureb Sallum
Martha S. Monteiro
Elaborador
Antônio Carlos Brolezzi

A FUNÇÃO MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

O conceito de módulo de um número real está associado à idéia de distância de um ponto da reta à origem. Como existe uma correspondência biunívoca[1] entre os pontos da reta e os números reais, pensar na distância de um ponto à origem ou pensar no módulo de um número é exatamente a mesma coisa. Dessa maneira, $|5| = 5$ e $|-5| = 5$, pois o número 5 está a uma distância de 5 unidades da origem, e o ponto -5 também está a 5 unidades da origem.

De modo geral, definimos o módulo de um número real *a* da seguinte maneira:

se $a > 0$, $|a| = a$;

se $a < 0$, $|a| = -a$;

se $a = 0$, $|0| = 0$.

Podemos definir uma *função* que, *a cada número real x associa o módulo de x*, ou seja, a distância de *x* à origem. Temos assim:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

O gráfico dessa função tem o seguinte aspecto:

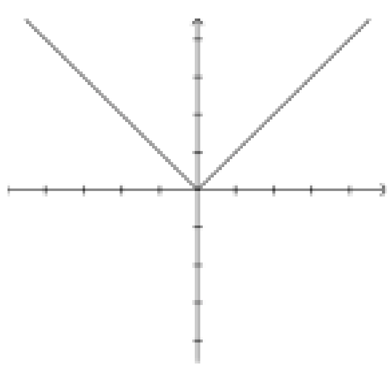


Figura 32. O gráfico de $y = |x|$

Com efeito, para os valores positivos ou zero da variável independente *x*, o valor da variável dependente *y* é o mesmo que *x*, pois $y = x$; para valores negativos de *x* o valor de *y* é $-x$, pois $y = -x$. Dessa forma, o gráfico é formado por duas semi-retas de mesma origem.

Outra maneira interessante de olhar para o gráfico de $y = |x|$ é considerar que ele coincide com a reta $y = x$ para valores de *x* positivos ou zero, enquan-

1. Dados dois conjuntos *A* e *B*, dizemos que eles estão em correspondência biunívoca quando a cada elemento de *A* corresponde um único elemento de *B* e reciprocamente.

to para valores negativos de x, tomamos a semi-reta "rebatida", pois, nesse caso, $|x| = -x$. Esta semi-reta "rebatida", evidentemente, é simétrica à original em relação ao eixo horizontal.

Observe que o gráfico de $y = |x|$ se sobrepõe ao de $y = x$ quando $x > 0$.

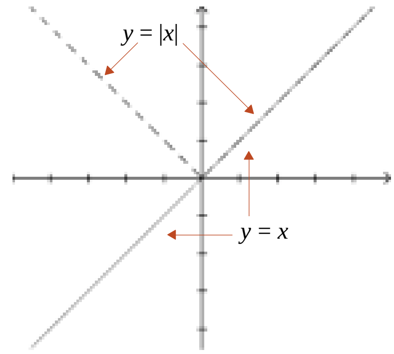


Figura 33. Os gráficos de $y = x$ e de $y = |x|$.

Essa última consideração nos permite entender rapidamente como será o gráfico de $y = |f(x)|$ para uma dada função f conhecida. De fato,

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}$$

e, portanto, seu gráfico:

i) coincide com o gráfico de f para todos os valores da variável independente x nos quais a variável dependente é positiva ou zero;

ii) é o "rebatido" ou o simétrico do gráfico de f em relação ao eixo horizontal, para todos os valores da variável independente x nos quais a variável dependente é negativa.

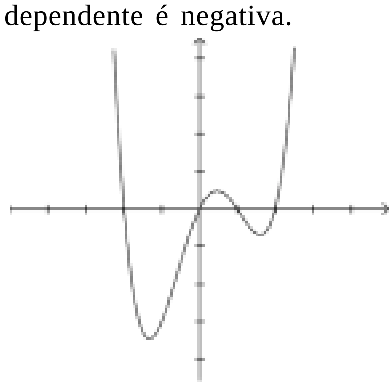


Figura 34. O gráfico de $y = f(x)$.

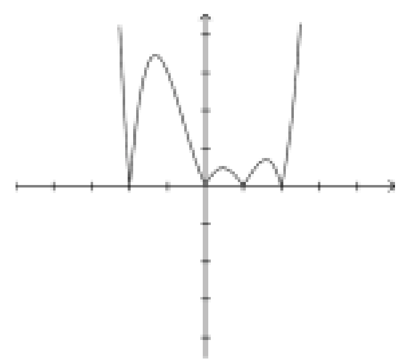


Figura 35. O gráfico de $y = |x|$.

Tudo o que vimos até aqui nos permite resolver um grande número de problemas, como diversas inequações.

Seja, por exemplo, a inequação $\big|1 - |2x - 1|\big| \geq |1 - 3x| - 3$.

Inicialmente, vejamos a situação graficamente, esboçando os gráficos das funções envolvidas na inequação dada, ou seja, $y = \big|1 - |2x - 1|\big|$ e $y = |1 - 3x| - 3$.

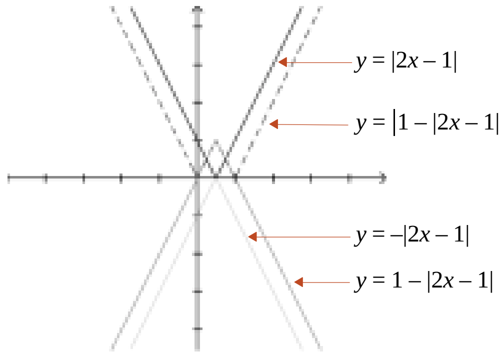


Figura 36. O gráfico de $y = \big|1 - |2x - 1|\big|$.

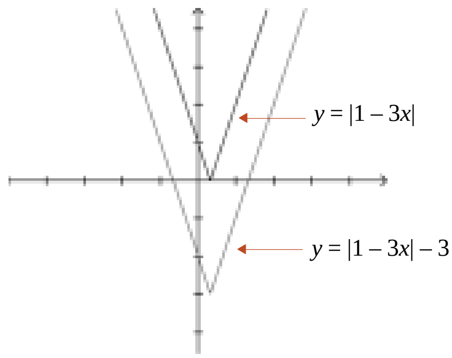


Figura 37. O gráfico de $y = |1 - 3x| - 3$

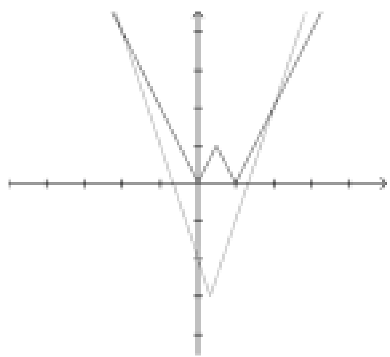


Figura 38. Os gráficos das funções envolvidas na inequação no mesmo sistema de eixos.

Precisamos encontrar as intersecções entre os gráficos das duas funções. Para tanto, basta resolver as equações:

i) $-\big(1 - (-(2x - 1))\big) = 1 - 3x - 3$ ou seja, $-2x = -3x - 2$

ii) $-(1 - (2x - 1)) = -(1 - 3x) - 3$ ou seja, $2x - 2 = 3x - 4$

Há vários raciocínios em termos de gráficos originais e rebatidos para chegar às duas equações. Confira com cuidado!

Da primeira equação, obtemos $x = -2$ e, da segunda, $x = 2$, que fornecem as abscissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos.

Como a inequação proposta $\big|1 - |2x - 1|\big| \geq |1 - 3x| - 3$, "exige" que o gráfico da função do primeiro membro esteja acima ou coincidente com o gráfico da função do segundo membro, o conjunto solução é: $S = \{\, x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\}$ ou, em notação de intervalo, $S = [-2, 2]$.

Como outro exemplo, vamos resolver a inequação $|3x + 4| < |2x^2 + 4x - 3|$.

Em primeiro lugar, vamos esboçar os gráficos das funções envolvidas, antes separadamente, depois no mesmo sistema de eixos cartesianos. Observe que construímos esses gráficos a partir dos gráficos das funções mais simples, $y = x$ e $y = x^2$, respectivamente. Identifique, nas figuras abaixo, cada um dos gráficos desenhados.

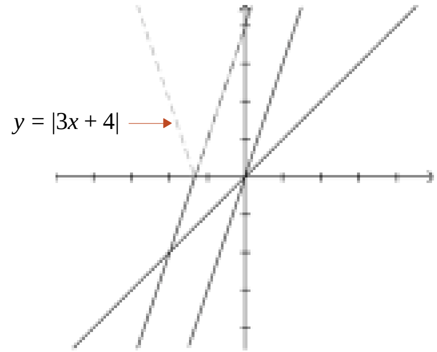


Figura 39. O gráfico de $y = |3x + 4|$ a partir do gráfico de $y = x$.

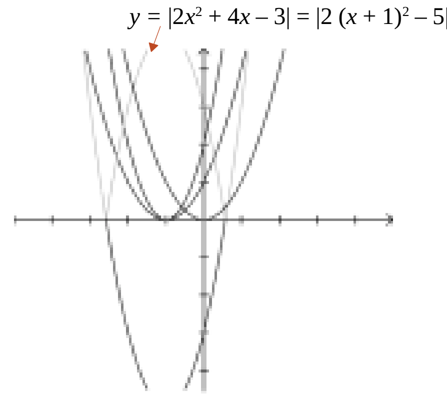


Figura 40. O gráfico de $y = |2x^2 + 4x - 3| = |2\,(x + 1)^2 - 5|$ a partir do gráfico de $y = x^2$.

Colocando os dois gráficos no mesmo sistema de eixos, temos:

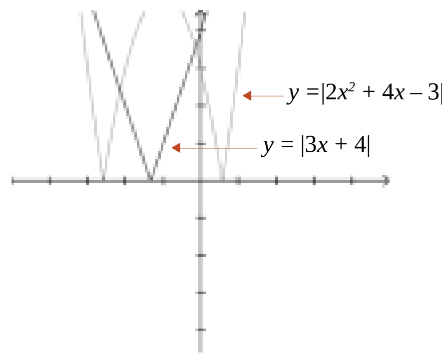


Figura 41. Os gráficos de $y = |3x + 4|$ e de $y = |2x^2 + 4x - 3|$.

A fim de resolver a inequação $|3x + 4| < |2x^2 + 4x - 3|$, vamos inicialmente determinar as intersecções dos dois gráficos. Embora nem todas estejam visíveis na figura, precisamos investigar a ocorrência de intersecções em:

- Original da função do primeiro grau com original da função do segundo grau: $3x + 4 = 2x^2 + 4x - 3$
- Original da função do primeiro grau com rebatida da função do segundo grau: $3x + 4 = -(2x^2 + 4x - 3)$
- Rebatida da função do primeiro grau com original da função do segundo grau: $-(3x + 4) = 2x^2 + 4x - 3$
- Rebatida da função do primeiro grau com rebatida da função do segundo grau: $-(3x + 4) = -(2x^2 + 4x - 3)$

Na realidade, essas quatro equações ficam reduzidas apenas a duas:

$3x + 4 = 2x^2 + 4x - 3$ e $3x + 4 = -(2x^2 + 4x - 3)$. Por quê?

A primeira equação tem duas soluções: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{57}}{4}$ ou $x = \dfrac{-1 - \sqrt{57}}{4}$; a segunda também: $x = \dfrac{-7 + \sqrt{41}}{4}$ ou $x = \dfrac{-7 - \sqrt{41}}{4}$. Verifique!

Esses quatro números precisam ser estimados[2], para que seja possível a comparação entre eles e concluir que: $\frac{-7-\sqrt{41}}{4} < \frac{-1-\sqrt{57}}{4} < \frac{-7+\sqrt{41}}{4} < \frac{-1+\sqrt{57}}{4}$. Assim, é possível entender a qual intersecção corresponde cada um deles.

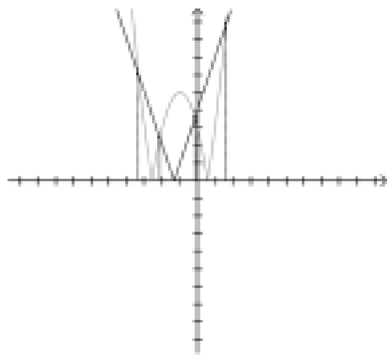


Figura 42. Visualizando as intersecções dos dois gráficos.

Como é preciso que $|3x + 4| < |2x^2 + 4x - 3|$, estamos buscando os valores de x para os quais o gráfico de $y = |3x + 4|$ fica abaixo do gráfico de $y = |2x^2 + 4x - 3|$. Logo, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \frac{-7-\sqrt{41}}{4} \text{ ou } \frac{-1-\sqrt{57}}{4} < x < \frac{-7+\sqrt{41}}{4} \text{ ou } x > \frac{-1+\sqrt{57}}{4} \right\}$$

que também pode ser escrito em notação de intervalos:

$$S = \left] -\infty, \frac{-7-\sqrt{41}}{4} \right[\cup \left] \frac{-1-\sqrt{57}}{4}, \frac{-7+\sqrt{41}}{4} \right[\cup \left] \frac{-1+\sqrt{57}}{4}, +\infty \right[.$$

Agora faça você

1. Sendo $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$, desenhe o gráfico de:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $g(x) = f(x)$

c) $h(x) = 2.|f(x)| + 1$

d) $i(x) = -\frac{1}{2} . |f(x)| + 2$

e) $j(x) = -\frac{1}{2} . |f(x) - 1| + 2$

f) $l(x) = -\frac{1}{4} . |f(x) - 2| - 4$

g) $m(x) = |f(x - 3)|$

2. Desenhe uma figura que tenha eixo de simetria horizontal, de maneira que ela possa ser obtida por meio de uma ou mais funções e seus módulos em determinado domínio. Verifique, possivelmente no computador, que as funções estabelecidas realmente produzem a figura desejada.

2. Observe que $7 < \sqrt{57} < 8$ e que $6 < \sqrt{41} < 7$.

3. Desenhe uma figura que tenha eixo de simetria vertical. Em seguida, defina as funções e seus respectivos domínios de modo que através de seus gráficos seja possível obter a figura criada.

4. Resolva as inequações graficamente primeiro e depois algebricamente:

a) $(x - \sqrt{2})^2 + 3 \leq 4x + 1$

b) $5x^2 - 4x + 2 > 1 - 5x$

A FUNÇÃO RAIZ QUADRADA POSITIVA DE UM NÚMERO REAL NÃO NEGATIVO

Seja a um número real não negativo. Dizemos que o número b é uma raiz quadrada de a se $b^2 = a$.

Dado um número real não negativo, podemos determinar suas duas raízes quadradas: uma positiva e a outra negativa. Por exemplo, 2 e – 2 são as duas raízes quadradas de 4, uma vez que $2^2 = 4$ assim como $(-2)^2 = 4$.

Utilizamos o símbolo $\sqrt{\ }$ para indicar a *raiz quadrada positiva*, embora muitas vezes os autores façam referência a esse símbolo como sendo o símbolo de raiz quadrada. Quando se procura a raiz quadrada negativa de um número, escreve-se necessariamente $-\sqrt{\ }$.

Observe que não podemos escrever $\sqrt{4} = \pm 2$, que está *errado* pois $\sqrt{2} = 2$.

Podemos então definir duas funções: a função raiz quadrada positiva de um número real não negativo, $y = \sqrt{x}$, e a função raiz quadrada negativa de um número real não negativo, $y = -\sqrt{x}$, ambas de domínio $\mathbb{R}_+$. Para estudá-las, evidentemente, podemos detalhar o caso apenas da primeira função, pois a segunda é a “rebatida” dela com relação ao eixo horizontal.

A função $y = \sqrt{x}$ é a *função inversa* de $y = x^2$, quando consideramos esta última *restrita ao domínio* $\mathbb{R}_+$. De fato, essas duas funções estão intimamente relacionadas, pois uma “desfaz o serviço” da outra, isto é:

$$x \in \mathbb{R}_+ \underset{\boxed{\text{eleva ao quadrado}}}{\longmapsto} x^2 \underset{\boxed{\text{extrai a raiz quadrada}}}{\longmapsto} \sqrt{x^2} = |x| = x$$

e

$$x \in \mathbb{R}_+ \underset{\boxed{\text{extrai a raiz quadrada}}}{\longmapsto} \sqrt{x} \underset{\boxed{\text{eleva ao quadrado}}}{\longmapsto} (\sqrt{x})^2 = x$$

Observe que $\sqrt{x^2} = |x| = x$, pois $x \in \mathbb{R}_+$.

Para entender melhor essa questão, imagine que você eleva ao quadrado um número não negativo e depois extrai a raiz quadrada desse resultado: certamente vai voltar ao número dado inicialmente. Do mesmo modo, se, na calculadora, você calcula a raiz quadrada de um número não negativo e, em seguida, eleva o resultado ao quadrado, vai encontrar como resultado o número do qual você partiu, a menos de erros de aproximação[3].

3. Vimos que $\sqrt{3}$ é irracional. Numa calculadora comum, em geral, só há lugar para 8 dígitos. Por isso, numa dessas calculadoras, o valor de $\sqrt{3}$ é dado por 1,7320508 que é um resultado aproximado. Dessa maneira, ao elevar esse resultado ao quadrado, não vamos obter 3, mas $(1{,}732050807)^2 = 2{,}99999999$.

Assim dizemos que a função raiz quadrada (positiva) e a função que eleva ao quadrado um número não negativo são inversas uma da outra.

Os gráficos das duas funções, quando colocados no mesmo par de eixos, apresentam uma característica muito importante: são *simétricos* em relação à reta $y = x$. Por exemplo,os pares ordenados (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) estão no gráfico de $y = x^2$. Seus simétricos, em relação à reta $y = x$, (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4) estão no gráfico de $y = \sqrt{x}$.

De modo geral, para qualquer valor não negativo da variável independente x, o par ordenado (x, y), em $y = x^2$, é simétrico ao par ordenado (x, y) em $y = \sqrt{x}$, com relação à reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares.

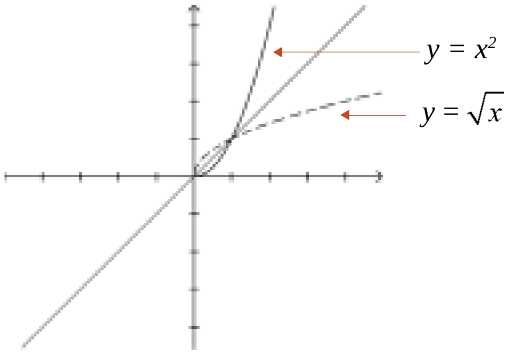


Figura 43. Os gráficos de $y = x^2$ e de $y = \sqrt{x}$ para $x \in \mathbb{R}_+$, no mesmo par de eixos.

Uma vez conhecido o gráfico de $y = \sqrt{x}$, podemos estudar as funções cujos gráficos são translações horizontais ou verticais ou mudanças de inclinação desse gráfico.

Agora faça você

1. Esboce o gráfico das funções $y = \sqrt{x+4}$ e $y = \sqrt{x} + 2$. Para cada uma delas, esboce também o gráfico de sua inversa, no mesmo par de eixos.

2. Resolva a inequação $\sqrt{x+4} > \frac{1}{2}x$, esboçando os gráficos das funções envolvidas a fim de visualizar o conjunto solução obtido algebricamente.

3. Invente outras equações e inequações para resolver gráfica e algebricamente.

A função $y = x^n$, onde n é um número natural estritamente positivo

Para cada valor do número natural n temos definida uma função de domínio real. É interessante observar que os gráficos das diferentes funções obtidas têm pelo menos dois pontos em comum. De fato, quando $x = 0$, temos $y = 0$ e quando $x = 1$ temos $y = 1$. Isso significa que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o gráfico de $y = x^n$ passa pelos pontos (0, 0) e (1, 1).

Fazendo, num mesmo par de eixos, os gráficos para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$, por exemplo, temos:

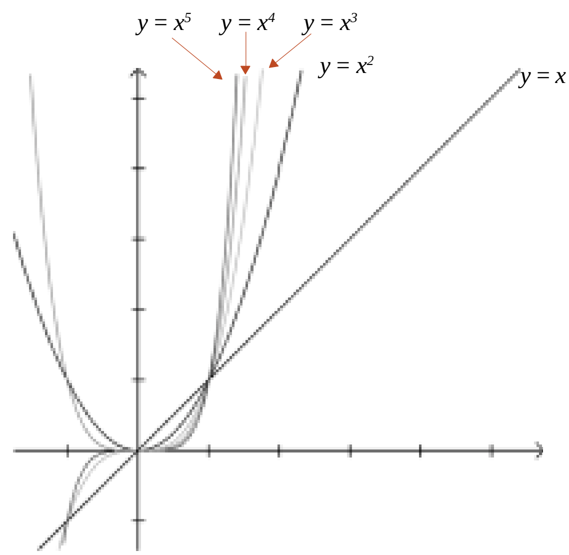


Figura 44. O gráfico de $y = x^n$ para $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 5$.

Vários fatos podem ser observados:

- O domínio de todas as funções é o conjunto dos números reais.
- Quando o expoente n é par, a imagem é o conjunto R_+, e quando o expoente n é ímpar, a imagem é o conjunto R.
- Várias desigualdades podem ser estabelecidas por meio da observação dos gráficos. Por exemplo: para $0 \leq x \leq 1$, temos: $x^5 \leq x^4 \leq x^3 \leq x^2 \leq x$, que podem ser facilmente[4] provadas algebricamente.

4. Observe, se $0 \leq x \leq 1$, multiplicando membro a membro por $x \geq 0$, ...

Às vezes, precisamos decidir se uma dada afirmação A é verdadeira ou falsa. Se a conclusão for que A é verdadeira, precisamos ter um argumento – gráfico, algébrico – que mostre isso. Se, porém, a conclusão for que A é falsa, basta dar um contra-exemplo, isto é, um caso particular que mostra a falsidade da afirmação A.

Seja por exemplo, A a seguinte afirmação: $a < a^2$, $\forall a \in \mathbb{R}$[5].

Essa afirmação é falsa: por exemplo, $\frac{1}{2}$ não é menor que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Observe que você pode achar outros contra-exemplos.

5. O símbolo $\forall$ significa “qualquer que seja” ou “para todo”. O símbolo $\in$ significa “pertencente” ou “que pertence”.

Agora faça você:

1. Analise as afirmações abaixo e decida se são verdadeiras ou falsas. Caso a afirmação seja verdadeira, argumente; caso seja falsa, dê um contra-exemplo.

a) Se $a \leq b$, então $a^2 \leq b^2$.

b) Se $a^2 \leq b^2$, então $a \leq b$.

c) $a^2 \leq b^2$ é equivalente a $a \leq b$.

d) $a^2 \leq b^2$ é equivalente a $0 \leq a \leq b$.

e) $|x| \geq x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

f) $|x| \geq x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

g) $\sqrt{x^2} = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

h) $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

i) $x^2 \leq x^4$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Mais duas funções interessantes: $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$

O domínio dessas duas funções é o conjunto dos números reais diferentes de zero, que é indicado por $\mathbb{R}^*$. A primeira delas tem como imagem o conjunto $\mathbb{R}^*$, enquanto a imagem da segunda função é o conjunto $\mathbb{R}_+$. Graficamente, temos:

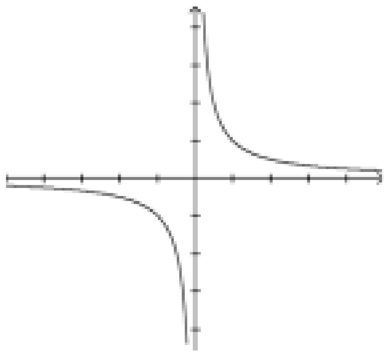


Figura 45. O gráfico de $y = \frac{1}{x}$.

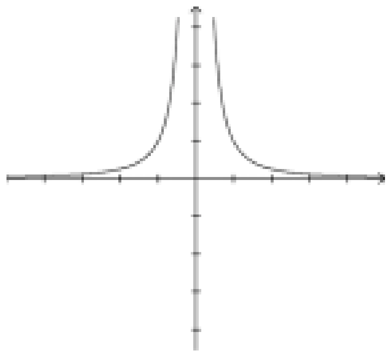


Figura 46. O gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$.

Em $y = \frac{1}{x}$, quando $x > 0$, temos:

a) se $x = 1$, então $y = 1$;

b) se $x > 1$ aumenta, y diminui e, se x aumenta infinitamente, y se aproxima de zero;

c) se $0 < x < 1$ e x se aproxima de zero, y cresce infinitamente mantendo o sinal;

d) quando $x < 0$, temos: se x se aproxima de zero, y cresce infinitamente em valor absoluto, mas com sinal negativo; se x diminui infinitamente, isto é, aumenta infinitamente em valor absoluto, mas com sinal negativo, y se aproxima de zero.

Em $y = \frac{1}{x^2}$, em ambos os casos, $x > 0$ ou $x < 0$, quando x se aproxima de zero, y cresce infinitamente; se x, $x > 0$, aumenta infinitamente, y se aproxima de zero e, se x, $x < 0$, diminui infinitamente, y também se aproxima de zero.

Com essas funções, também é possível fazer um estudo completo dos movimentos sofridos pelo gráfico de cada uma delas em sua forma mais simples, em termos de mudança de inclinação e translações horizontal e vertical.

Agora faça você

Esboce os gráficos de:

a) $y = \frac{2}{x-3} + 1$

b) $y = -\frac{2}{(x-3)^2} - 2$

Uma questão importante

Um aluno, ao resolver a inequação $\frac{2}{x-1} \leq 3$, fez as passagens seguintes:

$$\frac{2}{x-1} \leq 3 \quad \rightarrow \quad 2 \leq 3.(x-1) \quad \rightarrow \quad 2 \leq 3x - 3$$

ou seja,

$5 \leq 3x$ e, portanto, $x \geq \frac{5}{3}$.

Evidentemente, há erro na resolução apresentada, pois, por exemplo, o valor zero para a variável x satisfaz a inequação proposta e não está no conjunto das soluções. Descubra o erro e explique.

Finalmente, construindo o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1}{x^2}$ num mesmo par de eixos, temos:

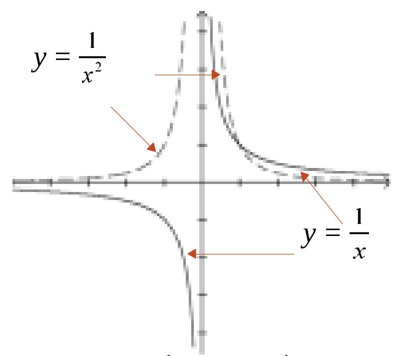


Figura 47. Os gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e de $y = \frac{1}{x^2}$ no mesmo par de eixos.

É possível observar que, para ambas as funções, quando $x = 1$, $y = 1$. Graficamente, verifica-se também que, para $x < 0$ ou $0 < x < 1$, vale a desigualdade $\frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$, enquanto que, para $x > 1$, vale $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$.

Agora faça você

1. Prove algebricamente as desigualdades acima.

2. Resolva algebricamente as inequações, esboçando os gráficos das funções envolvidas a fim de visualizar o conjunto solução:

a) $\frac{1}{x-1} \leq 1$

Sugestão: Pense na função mais simples $y = \frac{1}{x}$.

b) $\frac{2x+3}{5-x} \leq 2$

Sugestão: Divida os dois polinômios da fração do primeiro membro, a fim de comprovar a igualdade $\frac{2x+3}{5-x} = -2 - \frac{13}{x-5}$. Em seguida, pense nas translações, reflexões, mudanças de inclinação.

c) $\frac{1-3x}{x+2} > 9x - 6$

3. O gráfico de $y = \frac{2-x}{3x+1}$ apresenta algum tipo de simetria? Justifique a sua resposta.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Ao estudar a Trigonometria no triângulo retângulo, trabalhamos com as razões trigonométricas definidas para os ângulos agudos de um triângulo desse tipo. Entretanto, observando que a cada ângulo central corresponde um arco numa dada circunferência, surge a possibilidade de ampliar o estudo da Trigonometria, não ficando mais restrita ao contexto dos ângulos agudos de um triângulo retângulo.

A primeira questão é a de estabelecer uma medida conveniente para os ângulos, em certo sentido relacionada com os arcos determinados na circunferência.

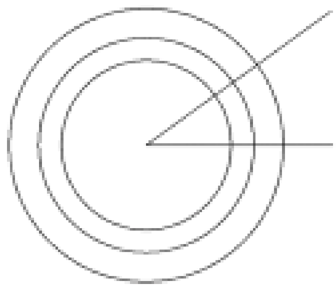


Figura 48. Um ângulo central tem vértice no centro da circunferência.

Na figura acima observamos que, ao mesmo ângulo, correspondem diferentes arcos, em circunferências de diferentes raios. Todos esses arcos estão relacionados, pois todos eles são determinados pelo mesmo ângulo central. Evidentemente são arcos que possuem comprimentos diferentes. Entretanto, a razão $\dfrac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}$ é uma constante[6], e esse fato leva a estabelecer a seguinte definição:

> A medida de um ângulo em radianos é igual à razão $\dfrac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}$

Assim, o *radiano* é uma unidade utilizada para medir ângulos. Qual a vantagem desta unidade, se comparada à unidade *grau*?

Uma grande vantagem é o fato de que, usando uma circunferência de raio unitário, a medida do ângulo central em radianos é numericamente igual ao comprimento do arco e isso vai ser essencial para possibilitar a ampliação do estudo da Trigonometria, à qual nos referimos antes.[7]

Assim sendo, vamos considerar uma circunferência de raio 1 com centro na origem do sistema cartesiano de coordenadas. A essa representação damos o nome de *circunferência trigonométrica ou círculo trigonométrico*.

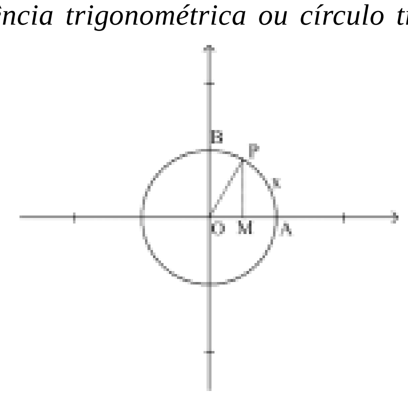


Figura 49. A circunferência trigonométrica.

6. Para provar esse fato, são necessários argumentos de limite, portanto do contexto de Cálculo Diferencial e Integral, que escapam dos objetivos do Ensino Médio.

7. Uma outra vantagem, que historicamente motivou o aparecimento do radiano, é o fato de que com essa unidade muitas das fórmulas da Física ficaram mais simples, reduzindo a dificuldade de cálculo. Esse é mais um dos assuntos que aparecem no Cálculo Diferencial e Integral!

Por convenção, o ponto A = (1, 0) é a origem dos comprimentos de arco, o sentido anti-horário é o sentido positivo de percurso e o sentido horário é o negativo. Assim, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, marcamos na circunferência trigonométrica um ponto P, de modo que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P seja igual ao valor absoluto de x. Se $x > 0$, o percurso é feito no sentido anti-horário; se $x < 0$, no sentido horário.

Por exemplo, se $x = 2$, indo no sentido anti-horário, marcamos na circunferência um ponto P tal que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P é 2. Obtemos um ângulo central que tem 2 radianos.

Se $x = -2$, indo no sentido horário, marcamos na circunferência um ponto Q tal que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em Q é o valor absoluto de – 2, isto é, 2; neste caso, obtemos um ângulo central que tem – 2 radianos.

É importante observar que, como o comprimento de qualquer circunferência é um múltiplo do comprimento de seu raio – especificamente, $2\pi r$ – no caso da circunferência trigonométrica que tem raio 1, ao número real 2π corresponde o mesmo ponto ao qual corresponde o número real 0, ou seja, o ponto A. Analogamente, ao número real π corresponde o ponto correspondente a meia circunferência, isto é, o ponto simétrico de A com relação ao eixo vertical. Isso deve ficar muito claro porque a semi-circunferência tem comprimento π e isso também significa que o ângulo raso mede π radianos. Cuidado, porém! O ângulo raso, medido em graus, tem 180º, ou seja,

$$\pi \text{ radianos} = 180^{o}$$

e você não pode simplesmente dizer que "π=180". Isso está incorreto, uma vez que π é um número real que é aproximadamente igual a 3,141592, muito menor do que 180.

Agora faça você:

1. Encontre na circunferência trigonométrica os pontos correspondentes aos números reais $x^1 = 10$ e $x^2 = -11{,}5$.

2. Transforme em radianos as medidas dos ângulos dadas em graus:

a) 30^o b) 400^o c) 3^o d) π^o e) $\frac{4}{3}\pi^o$

3. Transforme em graus as medidas dos ângulos dadas em radianos:

a) 1 rad b) 2 rad c) 10 rad d) 30 rad
e) 45 rad f) π rad g) 180 rad

Quando o número $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, determina um ponto no primeiro quadrante, ou seja, de maneira tal que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P é menor do que um quarto da circunferência; temos, então, um ângulo central de x radianos que é agudo. No triângulo retângulo OPM da figura anterior, observamos que valem as razões trigonométricas já definidas anteriormente, no triângulo retângulo. Assim $\cos x = \frac{OM}{OP} = OM$ e $\text{sen } x = \frac{PM}{OP} = PM$, uma vez que o raio da circunferência é 1.

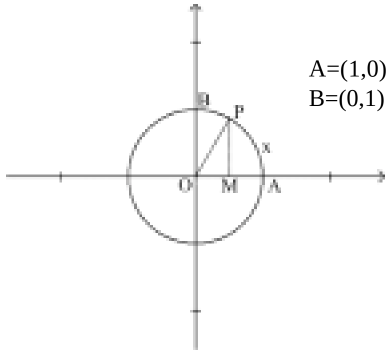


Figura 50. O ponto P está no primeiro quadrante.

Dessa forma, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos P = (cos x, sen x), ou seja, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, cos x é a abscissa de P e sen x é a ordenada de P. Vamos aproveitar essa idéia para definir as duas funções *seno* e *cosseno* para todo número real x.

Generalização

Para um número $x \in \mathbb{R}$, definimos cos x e sen x como sendo, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto P obtido na circunferência trigonométrica de modo que:

- se $x > 0$, o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P, marcado no sentido anti-horário, é x;
- se $x < 0$, o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P, marcado no sentido horário, é o valor absoluto de x.
- se $x = 0$, o arco de comprimento nulo tem origem e extremidade ambas em A; nesse caso, temos P = A = (cos 0, sen 0) = (1, 0).

a) Inicialmente, vejamos com cuidado o que acontece quando $x > 0$.

- Se $x = \frac{\pi}{2}$, temos $P = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$. Justifique!
- Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, temos que P = (cos x, sen x) é um ponto do segundo quadrante, sendo que cos x = – cos ($\pi - x$) e sen x = sen ($\pi - x$). Comprove esse fato geometricamente, usando congruência de triângulos e observando que $\pi - x$ determina um ponto P' no primeiro quadrante. Por quê?

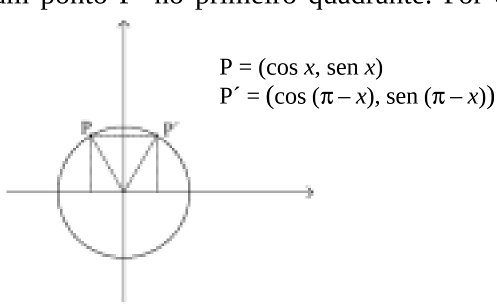


Figura 51. O ponto P está no segundo quadrante.

- Se $x = \pi$, temos P = (cos π, sen π) = (–1, 0). Justifique!
- Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que P = (cos x, sen x) é um ponto do terceiro quadrante, sendo que cos x = – cos ($x - \pi$) e sen x = – sen ($x - \pi$) e. Comprove

esse fato geometricamente, usando congruência de triângulos e observando que $x - \pi$ determina um ponto P' no primeiro quadrante. Por quê?

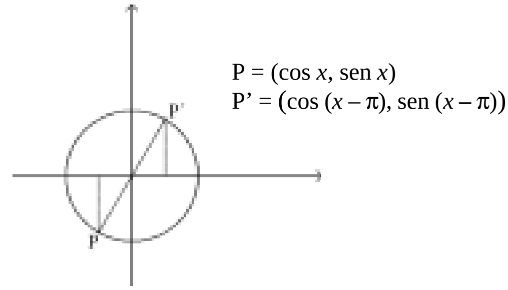


Figura 52. O ponto P está no terceiro quadrante.

- Se $x = \frac{3\pi}{2}$, temos $P = \left(\cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$. Justifique!

- Se $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, temos que P = (cos x, sen x) é um ponto do quarto quadrante sendo que cos x = cos ($2\pi - x$) = cos ($-x$) e sen x = sen ($2\pi - x$) = – sen ($-x$). Comprove esse fato geometricamente, usando congruência de triângulos e observando que $2\pi - x$ determina um ponto P' no primeiro quadrante. Por quê?

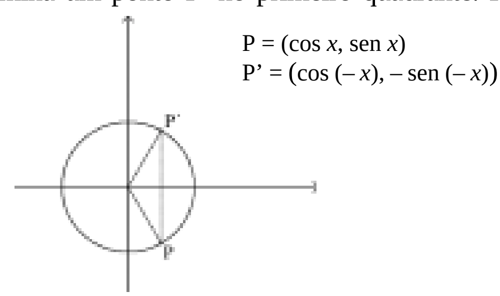


Figura 53. O ponto P está no quarto quadrante.

· Se $x = 2\pi$, temos P = (cos 2π, sen 2π) = (1, 0) e, novamente, P=A. Justifique!

· Após a primeira volta, temos que cos ($x + 2k\pi$) = cos x e sen ($x + 2k\pi$) = sen x para todo inteiro k. Observe que $2k\pi = k.\ 2\pi$ representa k voltas na circunferência trigonométrica.

b) Vejamos agora o que acontece quando $x < 0$.

A análise é muito semelhante, lembrando que a circunferência trigonométrica é percorrida agora no sentido horário. É suficiente você observar que cos($-x$) = cos x e que sen ($-x$) = –sen x, na figura abaixo. Conforme fica determinado um ponto no quarto, terceiro, segundo ou primeiro quadrante, comparamos a abscissa e a ordenada com um ponto do primeiro quadrante, de maneira análoga ao que fizemos no caso em que $x > 0$. Verifique!

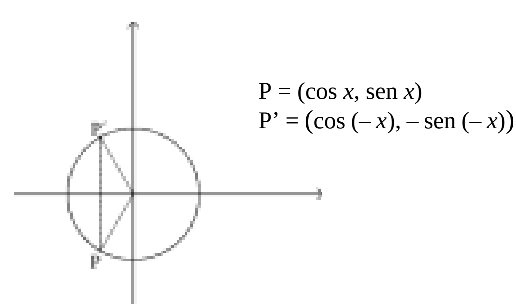


Figura 54. cos($-x$) = cos x e sen ($-x$) = –sen x.

Dessa forma, uma imagem razoável é a de que a reta real foi "enrolada" na circunferência trigonométrica; o semi-eixo positivo no sentido anti-horário e o semi-eixo negativo no sentido horário.

A partir daí, podemos observar que conforme $x \in \mathbb{R}$ varia, isto é, o ponto P percorre a circunferência, a abscissa e a ordenada de P variam no intervalo $[-1, 1]$. Então, temos imediatamente que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ e $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Podemos esboçar os gráficos[8] das duas funções: $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$.

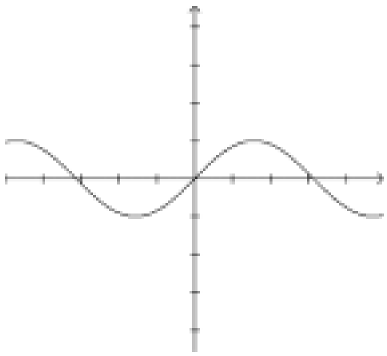


Figura 55. O gráfico de $y = \text{sen } x$.

Compare com o que ocorre na circunferência trigonométrica, na primeira volta:

- para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, o valor de sen x cresce de 0 a 1;
- para $\frac{\pi}{2} \leq x <$ p, o valor de sen x decresce de 1 a 0;
- para p $\leq x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de sen x decresce de 0 a -1;
- para $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$, o valor de sen x cresce de -1 a 0.

8. No contexto do Ensino Médio, não é possível apresentar os argumentos formais para garantir que os gráficos são realmente esses: no máximo, você pode se convencer da razoabilidade, verificando para valores particulares de *x*. Um convencimento mais amplo e preciso necessita de argumentos que são desenvolvidos no Cálculo Diferencial e Integral.

Agora faça você

Mostre geometricamente, ou seja, usando congruência de triângulos, que:

$$\cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

e que

$$\text{sen } x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Assim, por meio da primeira relação, você pode concluir que o gráfico de $y = \cos x$ é uma translação horizontal de $-\frac{\pi}{2}$ do gráfico de $y = \text{sen } x$.

Ou seja, o gráfico de $y = \cos x$ tem o seguinte aspecto:

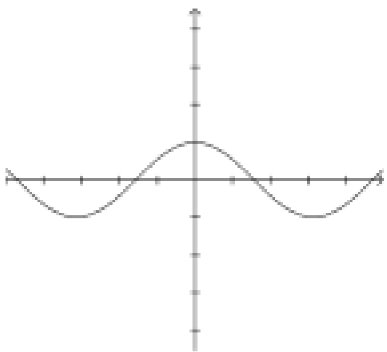


Figura 56. O gráfico de $y = \cos x$.

Compare com o que ocorre na circunferência trigonométrica, na primeira volta:

- para $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, o valor de cos x decresce de 1 a 0;
- para $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$, o valor de cos x decresce de 0 a -1;
- para $\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de cos x cresce de -1 a 0;
- para $\frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi$, o valor de cos x cresce de 0 a 1.

Em termos dos gráficos das duas funções $y = \text{sen}\ x$ e $y = \cos x$, qual a conclusão que pode ser estabelecida a partir da relação $\text{sen}\ x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, que você mostrou geometricamente ser verdadeira?

Ambas as funções definidas têm domínio real e como imagem o intervalo [1, 1]. A metade do comprimento desse intervalo é denominada *amplitude* do gráfico de cada uma das duas funções.

As funções trigonométricas que acabamos de definir têm uma característica importante que é o fato de serem ambas periódicas[9], de *período* 2π. De fato, o gráfico de cada uma delas no intervalo $[2k\pi, (2k + 2)\pi]$ é o mesmo do que no intervalo $[0, 2\pi]$, para todo número inteiro k, pois o primeiro intervalo denota a k-ésima volta na circunferência, começando no ponto A.

9. Uma função f é dita periódica de período T quando $f(x + T) = f(x)$, sempre que x e $(x+T)$ pertençam ao domínio de f. Observe que isso significa que o gráfico de f se repete em intervalos de comprimento T.

Relação fundamental

Um fato muito útil e importante é: para todo $x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Observe que é uma conseqüência imediata do Teorema de Pitágoras. Verifique!

Propriedade importante

A figura abaixo mostra dois pontos, A = (cos a, sen a) e B = (cos b, sen b), na circunferência trigonométrica.

Vamos provar a identidade: $\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$, no caso em que $0 < a - b < \pi$. A relação vale para quaisquer a e b. A verificação fica a seu cargo.

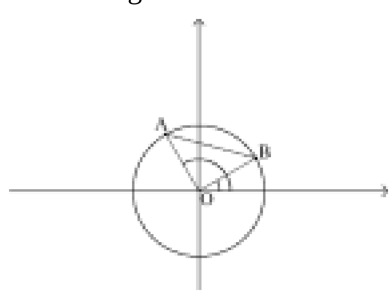


Figura 57. Os pontos A e B na circunferência trigonométrica.

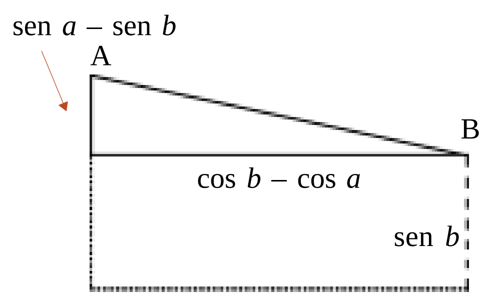


Figura 58. O triângulo retângulo ampliado.

Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo retângulo da figura acima, temos:

$$(AB)^2 = (\text{sen}\ a - \text{sen}\ b)^2 + (\cos b - \cos a)^2$$

e, usando a lei dos cossenos, no triângulo AOB da Figura 59, temos: $(AB)^2 = 1 + 1 - 2\cos(a - b)$, pois dois lados desse triângulo são raios da circunferência trigonométrica.

A partir das duas igualdades, podemos escrever:

$$(\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen}\ a - \text{sen}\ b)^2 = 2 - 2\cos(a - b)$$

Desenvolvendo os quadrados, fazendo as simplificações possíveis e utilizando a relação fundamental, temos:

$$\cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a - 2\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b + \text{sen}^2 b = 2 - 2\cos(a - b)$$

1 1

de onde,

$$2 - 2\cos a \,.\, \cos b - 2\,\text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b = 2 - 2\cos(a - b)$$

ou seja,

$$\cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b = \cos(a - b)$$

ou, equivalentemente,

$$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b,$$

como queríamos mostrar.

De maneira análoga ao que foi feito no estudo da função polinomial do segundo grau, podemos examinar a ação dos coeficientes a, b, m e k em

$$y = a \,.\, \text{sen}\,(bx + m) + k = a \,.\, \text{sen}\, b\left(x + \frac{m}{b}\right) + k$$

$$y = a \,.\, \cos\,(bx + m) + k = a \,.\, \cos b\left(x + \frac{m}{b}\right) + k$$

As figuras abaixo devem dar uma idéia da ação de cada um dos coeficientes, no caso da função $y = \text{sen}\, x$. Verifique!

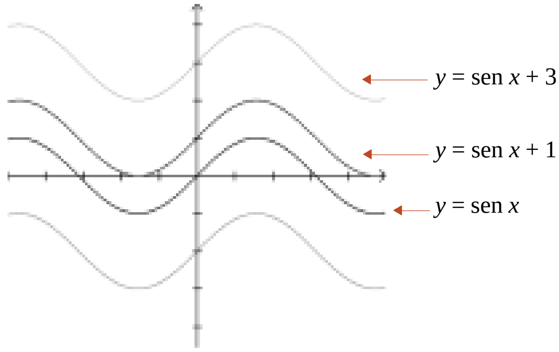


Figura 59. Translações verticais de $y = \text{sen}\, x$.

O coeficiente *a* define a amplitude do gráfico, em cada caso.

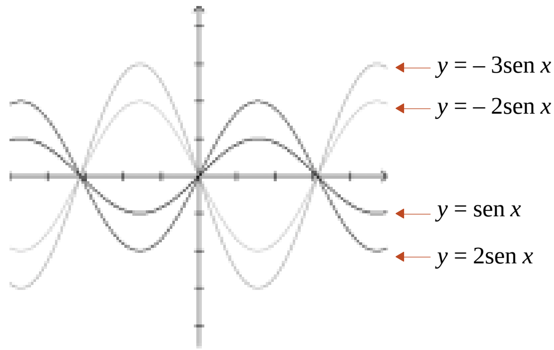


Figura 60. Gráfico de funções do tipo $y = a \,.\, \text{sen}\, x$, para alguns valores de a.

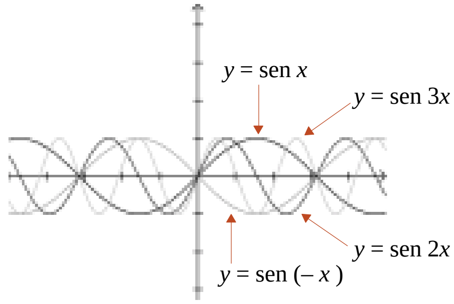


Figura 61. Gráfico de funções do tipo $y = \text{sen}\, bx$, para alguns valores de b.

Observe que os gráficos de $y = -\text{sen } x$ e o de $y = \text{sen } (-x)$ coincidem. Você já deve ter um argumento geométrico que também comprove esse fato. Qual?

Translações horizontais do gráfico de $y = \text{sen } x$.

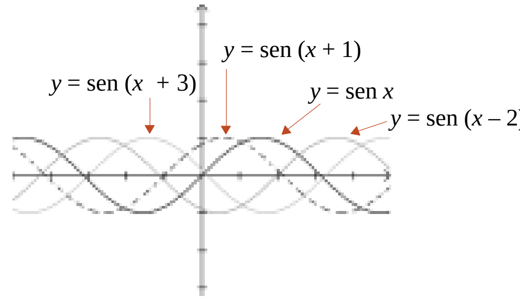


Figura 62. Gráfico de funções do tipo $y = \text{sen } (x + m)$ para alguns valores de m.

Vamos definir mais uma função trigonométrica: a função $y = \text{tg } x$. Novamente, a definição é uma ampliação da definição vista no triângulo retângulo, passando agora para a circunferência trigonométrica. Assim sendo, definimos $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, sempre que $\cos x \neq 0$. Isso significa que, para os números reais da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, não existe a tangente. Por quê?

Vejamos como se amplia essa definição para todo número real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para tanto, a reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto $A = (1, 0)$ – que é a reta de equação $x = 1$ – onde se mede o valor de tg x, é orientada: positiva para cima e negativa para baixo do eixo horizontal.

- quando $x = 0$, $\text{tg } 0 = \frac{\text{sen } 0}{\cos 0} = 0$;
- quando x cresce de maneira que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, sen $x > 0$ e $\cos x > 0$, logo tg $x > 0$. Conforme x cresce tendendo a $\frac{\pi}{2}$, cos x vai se tornando arbitrariamente próximo de 0, enquanto que sen x tende a 1; então, o quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ vai se tornando arbitrariamente grande;

Devido à semelhança dos triângulos OMP e OAT, temos:
$\frac{AT}{OA} = \frac{MP}{OM}$
Como AO=1, temos
$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = AT$

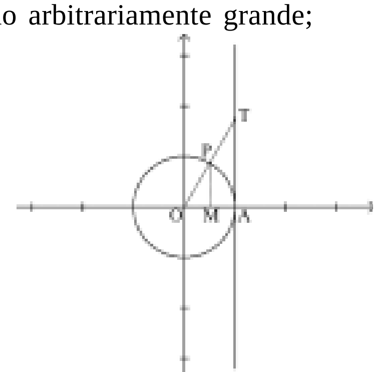


Figura 63. A definição de tg x para x no primeiro quadrante.

- quando $x = \frac{\pi}{2}$, não existe tg $\frac{\pi}{2}$, pois $\cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- quando x cresce de maneira que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, sen> 0 e $\cos x < 0$, logo tg $x < 0$. Para x um pouco maior que $\frac{\pi}{2}$, sen x está muito próximo de 1 enquanto

que cos x está muito próximo de 0, logo tg x é um número negativo mas de valor absoluto muito grande. Conforme x cresce até π, tg x aumenta, pois é sempre um número negativo cada vez mais próximo de 0;

Dado x, determina-se P no segundo quadrante; e também determina-se o ponto P’, correspondente a $\pi - x$, no primeiro quadrante. Temos: tg $x = -$ tg $(\pi - x)$

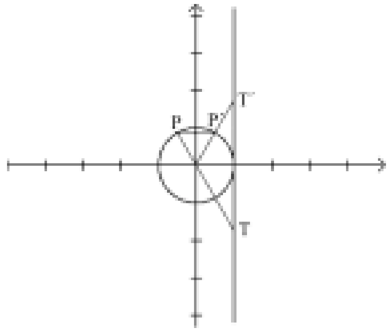


Figura 64. A definição de tg x para x no segundo quadrante.

- quando $x = \pi$, tg $\pi = 0$;
- quando x cresce de maneira que p $< x < \frac{3\pi}{2}$, sen $x < 0$ e cos $x < 0$, logo tg $x > 0$. Conforme x cresce tendendo a $\frac{3\pi}{2}$, cos x vai se tornando arbitrariamente próximo de 0, enquanto que sen x tende a -1; então, o quociente $\frac{\text{sen } x}{\cos x}$ vai se tornando arbitrariamente grande;

Dado x, determina-se P no terceiro quadrante; e também determina-se o ponto P’, correspondente a $x - \pi$, no primeiro quadrante. Temos tg $x =$ tg $(x - \pi)$

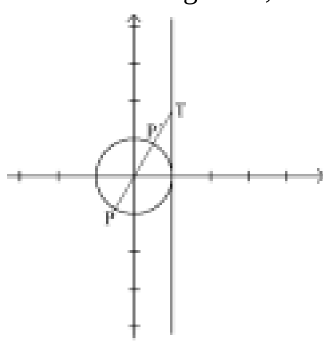


Figura 65. A definição de tg x para x no terceiro quadrante.

- quando $x = \frac{3\pi}{2}$, não existe tg $\frac{3\pi}{2}$, pois cos $\frac{3\pi}{2} = 0$;
- quando x cresce de maneira que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, sen $x < 0$ e cos $x > 0$, logo tg $x < 0$. Para x um pouco maior que $\frac{3\pi}{2}$, sen x está muito próximo de -1 enquanto cos x está muito próximo de 0, logo tg xé um número negativo mas de valor absoluto muito grande. Conforme x cresce até 2π, tg x aumenta, pois é sempre um número negativo cada vez mais próximo de 0.

Dado x, determina-se P no quarto quadrante; e também determina-se o ponto P’, correspondente a $2\pi - x$, no primeiro quadrante. Temos: tg $x = -$ tg $(2\pi - x)$

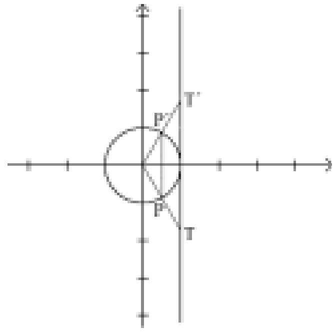


Figura 66: A definição de tg x para x no quarto quadrante.

Completamos assim a primeira volta na circunferência trigonométrica. Entretanto, para estudar a função y = tg x poderíamos ter analisado apenas meia volta. Por quê?

Na circunferência trigonométrica podemos observar que tg ($-x$) = $-$tg x. Justifique esse fato. A partir dessa propriedade, basta estudar a variação de y = tg x quando a variável x é um número não negativo, pois automaticamente já conheceremos seu comportamento para valores negativos de x.

O gráfico de y = tg x pode ser esboçado, mas novamente precisamos lembrar que fogem do contexto do Ensino Médio os argumentos necessários para garantir que, de fato, é aquele que está na figura abaixo.

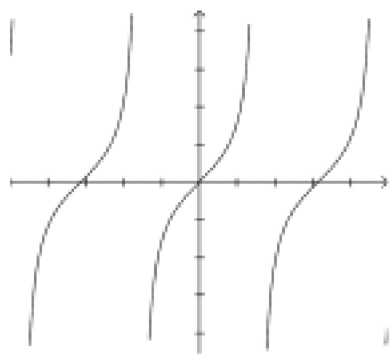


Figura 67. O gráfico de y = tg x.

Compare com o que ocorre na circunferência trigonométrica, na primeira volta:

- para $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, o valor de tg x cresce de 0 a ∞;
- para $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$, o valor de tg x cresce de $-\infty$ a 0;
- para $\pi \le x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de tg x cresce de 0 a ∞;
- para $\frac{3\pi}{2} \le x < 2\pi$, o valor de tg x cresce de $-\infty$ a 0.

Conforme já foi dito antes, y = tg x é uma função que não está definida em todo o conjunto dos números reais. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, enquanto que a imagem é o conjunto $\mathbb{R}$. Além disso, trata-se também de uma função periódica, cujo período é π.

Bibliografia

BARUFI, M.C.B.; LAURO, M.M. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. São Paulo: CAEM-IME-USP, 2001.

math.exeter.edu/rparris

www.cepa.if.usp.br/e-calculo

www.mcescher.com/

www-history.mcs.st-and.ac.uk

Sobre o autor

Antonio Carlos Brolezzi

Professor do Departamento de Matemática do IME-USP. É licenciado em Matemática, mestre e doutor em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Com experiência no Ensino Fundamental e Médio, trabalha com formação de professores desde 1988. Interessa-se pelos temas “criatividade”, “uso de história da Matemática” e “tecnologias no ensino de Matemática”.