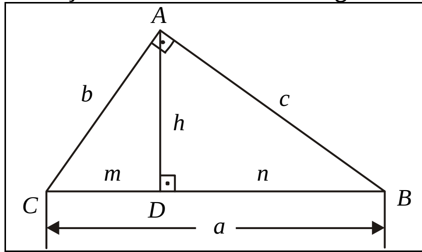
# Geometria Plana

## 1. Triângulo

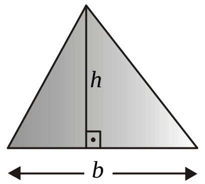
**Relações métricas em um triângulo retângulo**



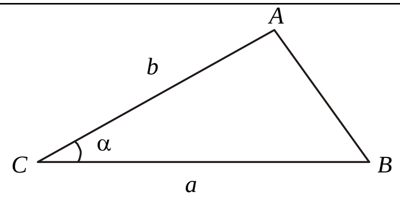

**Em um triângulo retângulo qualquer:**

* $a^2 = b^2 + c^2$
* $b^2 = ma$
* $c^2 = na$
* $h^2 = mn$
* $ah = bc$

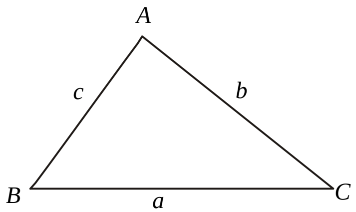
- **Área de um triângulo**



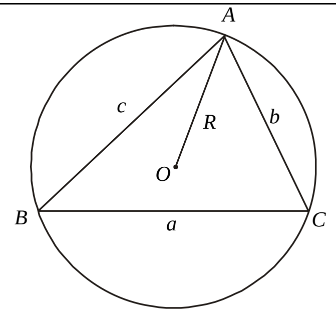

$$S = \frac{bh}{2}$$



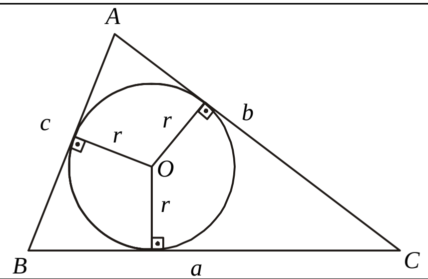

$$S = \frac{ab\,sen\alpha}{2}$$



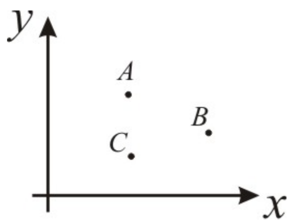

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$




$$S = \frac{abc}{4R}$$




$S = pr$ , em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

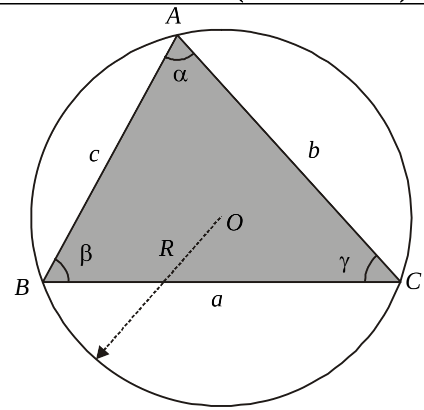



Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos de um plano cartesiano. Sendo $D$ o determinante obtido por

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}, \text{ tem-se que:}$$

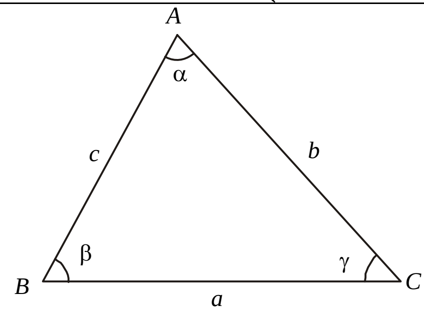
* $D = 0 \Leftrightarrow A$, $B$ e $C$ são colineares;
* $D \neq 0 \Leftrightarrow A$, $B$ e $C$ são vértices de um triângulo cuja área $S$ é dada por: $S = \dfrac{1}{2}|D|$

- **Teorema dos senos (*ou lei dos senos*)**




$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma} = 2R$$

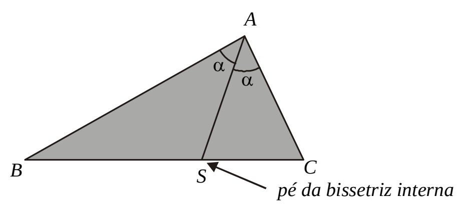
- **Teorema dos cossenos (*ou lei dos cossenos*)**




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

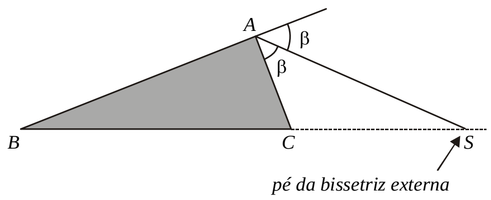
- **Teorema da bissetriz**

**Interna**




$$\frac{AB}{BS}=\frac{AC}{CS}$$

**Externa**

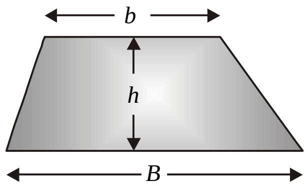



$$\frac{AB}{BS}=\frac{AC}{CS}$$

## 2. Quadriláteros

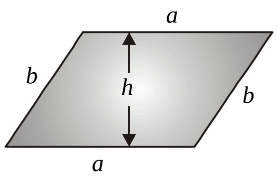
- **Áreas dos quadriláteros notáveis**

**Trapézio**



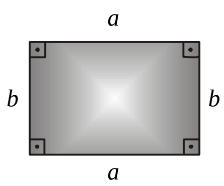

$$S=\frac{(B+b)h}{2}$$

**Paralelogramo**



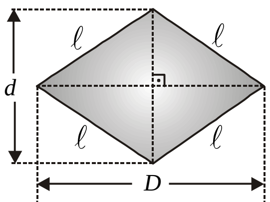

$$S=a\cdot h$$

**Retângulo**



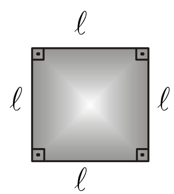

$$S=a\cdot b$$

**Losango**



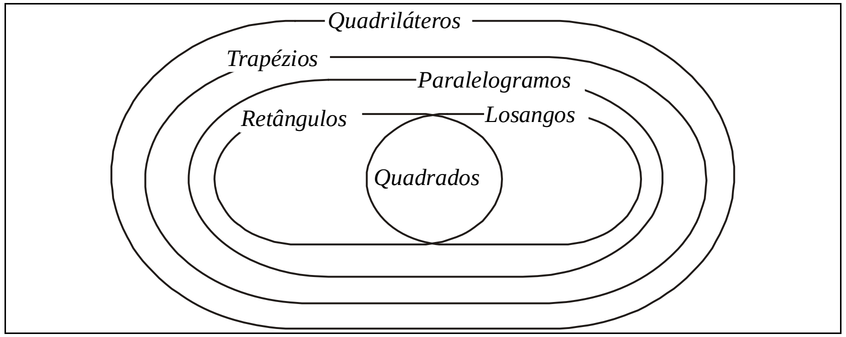

$$S=\frac{d\cdot D}{2}$$

**Quadrado**

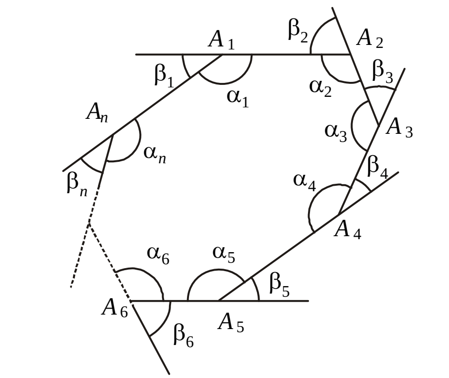



$$S=\ell^2$$

**Diagrama de inclusão dos quadriláteros**




## 3. Polígonos




**Em um polígono convexo de *n* lados:**

* o número de diagonais é $d=\frac{n(n-3)}{2}$

* a soma dos ângulos internos é $S_i=(n-2)180°$

* a soma dos ângulos externos é $S_e=360°$

**Em um polígono regular de *n* lados:**

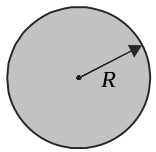
* cada ângulo interno é $\alpha=\frac{S_i}{n}=\frac{(n-2)180°}{n}$

* cada ângulo externo é $\beta=\frac{S_e}{n}=\frac{360°}{n}$

## 4. Círculo

- **Áreas das partes do círculo**

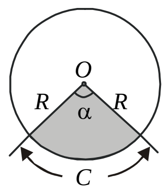
**Círculo**




* $S=\pi R^2$

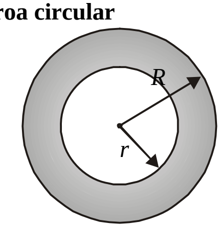
* $C=2\pi R$

**Setor circular**




$S=\frac{CR}{2}=\frac{\alpha R^2}{2}$, $\alpha$ em radianos

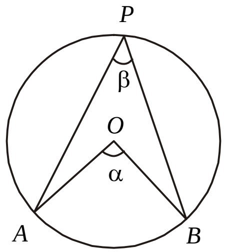
**Coroa circular**




$$S=\pi\left(R^2-r^2\right)$$

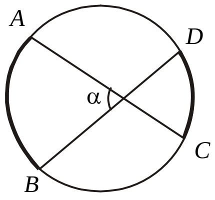
- **Ângulos em um círculo**

**Ângulo central ( $\alpha$ ) e ângulo inscrito ( $\beta$ )**



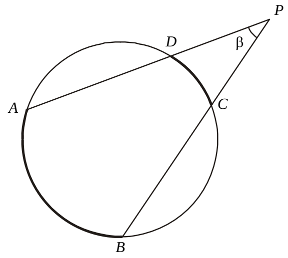

$\alpha = 2\beta = med\left(\widehat{AB}\right)$

**Ângulo excêntrico interior**




$\alpha = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

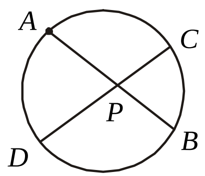
**Ângulo excêntrico exterior**




$\beta = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$

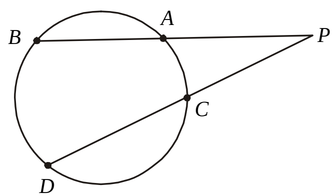
- **Potência de um ponto *P* em relação a uma circunferência**

***P* é interno**



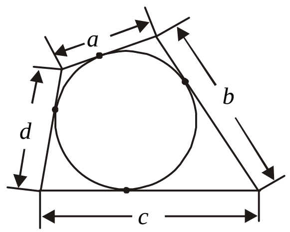

$(PA)(PB) = (PC)(PD)$

***P* é externo**




$(PA)(PB) = (PC)(PD)$

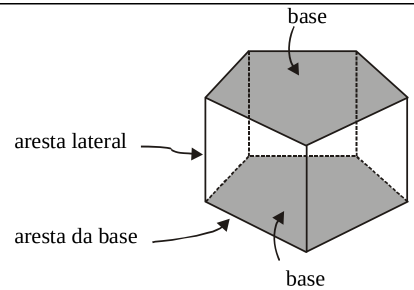
**Conseqüência importante**




$a + c = b + d$

# Geometria Espacial

## 1. Prisma

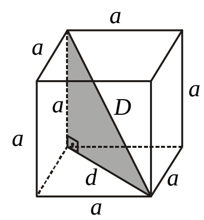



**Em um prisma qualquer:**

* o volume é $V = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$
* a área lateral $(A_\ell)$ é a soma das áreas das faces laterais
* a área da base $(A_B)$ é a área de apenas uma base
* a área total é $A_T = 2A_B + A_\ell$

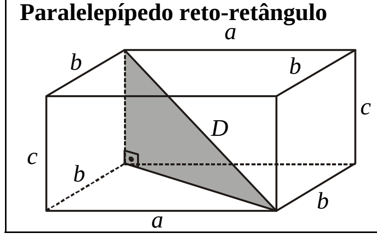
- **Prismas particulares**

**Cubo**



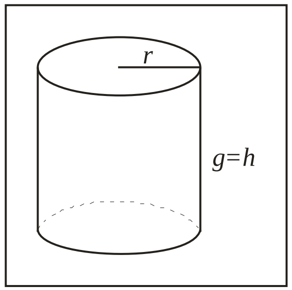

* Área da base: $A_B = a^2$
* Área lateral: $A_\ell = 4a^2$
* Área total: $A_T = 6a^2$
* Diagonal de uma face: $d = a\sqrt{2}$
* Diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$
* Volume: $V = a^3$

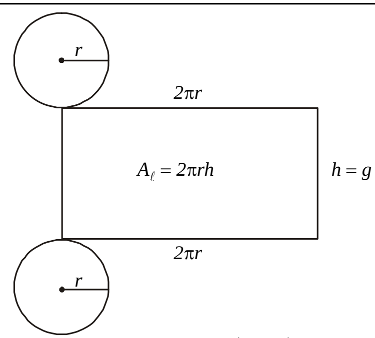
**Paralelepípedo reto-retângulo**




* Soma das dimensões: $a + b + c$
* Soma das arestas: $4a + 4b + 4c$
* Área total: $A_T = 2(ab + ac + bc)$
* Diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
* Volume: $V = abc$
* Relação importante: $(a + b + c)^2 = D^2 + A_T$

## 2. Cilindro circular reto



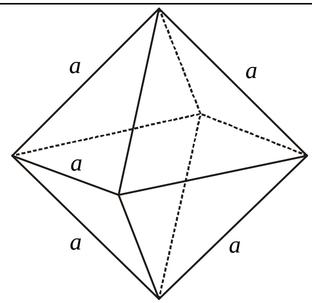




* Área da base: $A_B = \pi r^2$

* Área total: $A_T = 2\pi r(r + h)$

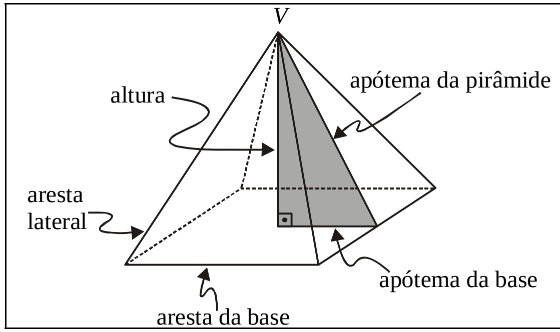
* Volume: $V = A_B h = \pi r^2 h$

* Área lateral: $A_\ell = 2\pi rh$




* Diagonal: $d = a\sqrt{2}$

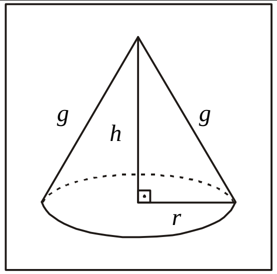
### 3. Pirâmide

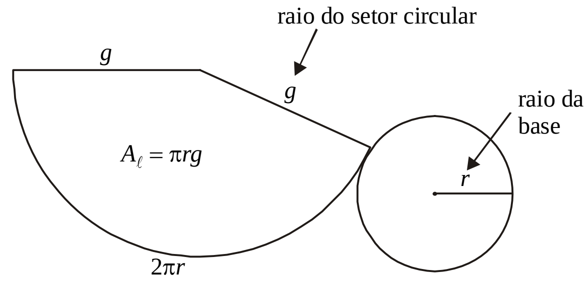



**Em uma pirâmide qualquer:**

* o volume é $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$
* a área lateral $(A_\ell)$ é a soma das áreas das faces laterais
* a área total $(A_T)$ é $A_T = A_B + A_\ell$

### 4. Cone circular reto

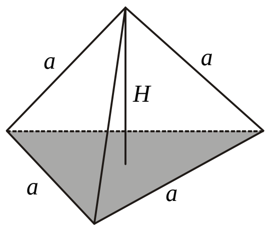



**Em qualquer cone circular reto:**

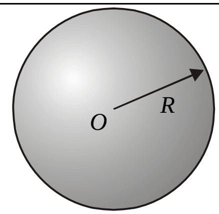
* $g^2 = h^2 + r^2$
* a área da base é $A_B = \pi r^2$
* a área lateral é $A_\ell = \pi rg$
* a área total é $A_T = \pi r(r + g)$
* o volume é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

- **Sólidos importantes**

| | |
|---|---|
| **Tetraedro regular**  | * Área da base: $A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$<br>* Área lateral: $A_\ell = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$<br>* Área total: $A_T = a^2\sqrt{3}$<br>* Altura: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$<br>* Volume: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ |
| **Octaedro regular** | * Área total: $A_T = 2a^2\sqrt{3}$<br>* Volume: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ |



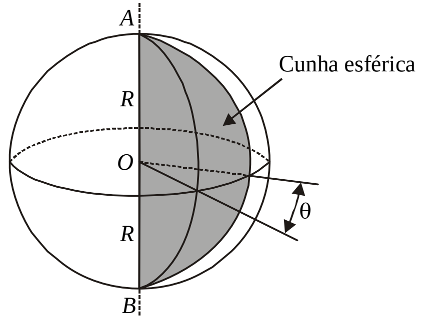
### 5. Esfera




* Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$
* Volume da esfera: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

- **Partes da esfera**

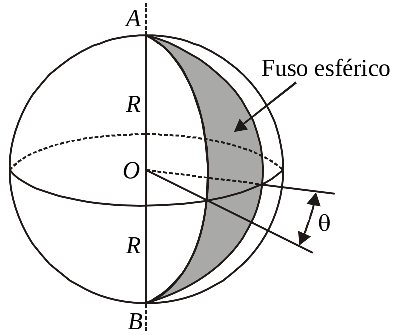
**Cunha esférica**




$$\begin{matrix} 2\pi \sim \dfrac{4}{3}\pi R^3 \\ \theta \sim S \end{matrix} \quad (\text{volume da cunha}) \Rightarrow V = \frac{2\theta R^3}{3},$$

$\theta$ em radianos

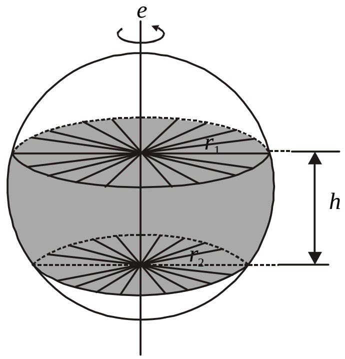
**Fuso esférico**




$$\begin{matrix} 2\pi \sim 4\pi R^2 \\ \theta \sim S \end{matrix} \quad (\text{área do fuso}) \Rightarrow S = 2\theta R^2,$$

$\theta$ em radianos

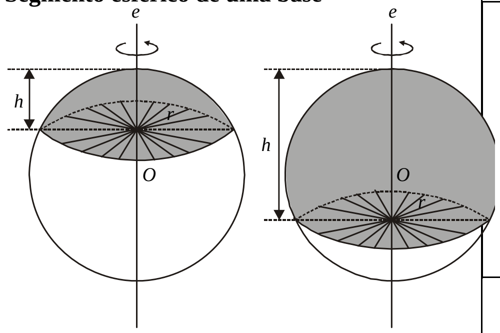
**Segmento esférico de duas bases**




* Volume ($V$): $V = \dfrac{\pi h}{6}\left[3\left(r_1^2 + r_2^2\right) + h^2\right]$

* Área ($S$): $S = 2\pi Rh + \pi r^2{}_1 + \pi r_2{}^2$

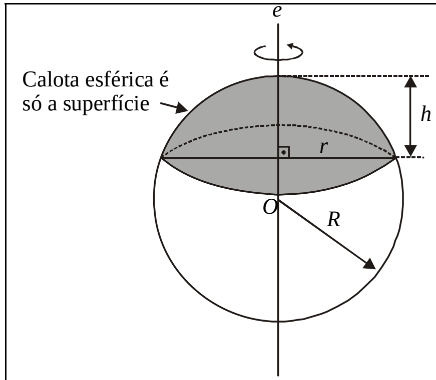
**Segmento esférico de uma base**




* Volume ($V$): $V = \dfrac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right)$

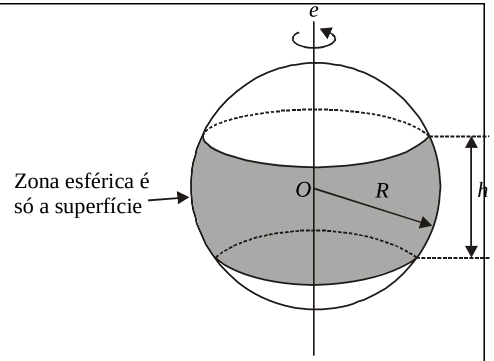
* Área ($S$): $S = 2\pi Rh + \pi r^2$

**Calota esférica**



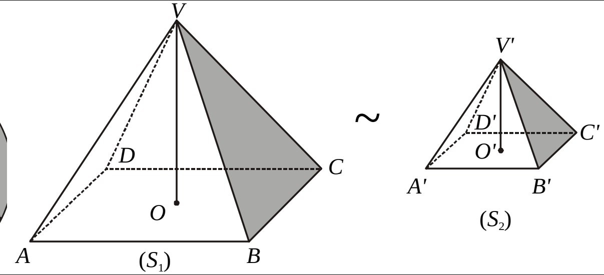

* Área ($S$): $S = 2\pi Rh$

**Zona esférica**




* Área ($S$): $S = 2\pi Rh$

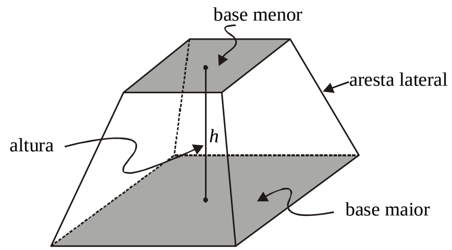
**6. Razão de semelhança de dois sólidos**




Quando dois sólidos $S_1$ e $S_2$ (*como os da figura*) são semelhantes de razão linear $k$

* a razão entre dois elementos lineares quaisquer é $k$
* a razão entre as áreas correspondentes é $k^2$
* a razão entre os volumes é $k^3$

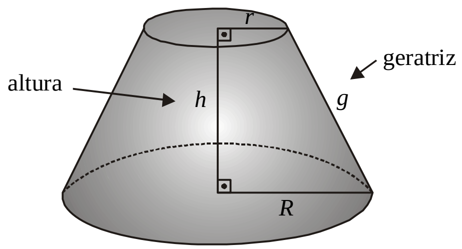
**7. Tronco de pirâmide de bases paralelas**

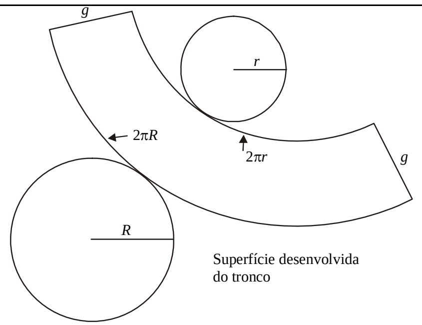



Sendo $A_b$ a área da base menor, $A_B$ a área da base maior, $A_\ell$ a área lateral, $h$ a altura e $V$ o volume do tronco, tem-se que:

* a área lateral $A_\ell$ é a soma das áreas das faces laterais
* a área total é $A_T = A_B + A_b + A_\ell$
* o volume é $V = \dfrac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)$

## 8. Tronco cone de revolução de bases paralelas



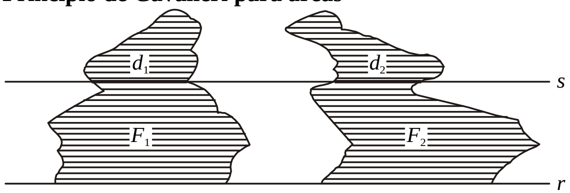




Sendo $A_b$ a área da base menor, $A_B$ a área da base maior, $A_\ell$ a área lateral, $g$ a geratriz, $h$ a altura e $V$ o volume do tronco, tem-se que:

* $A_b = \pi r^2$
* $A_B = \pi R^2$
* $A_\ell = \pi g(R + r)$
* $A_T = A_B + A_b + A_\ell$
* $V = \dfrac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right) = \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$

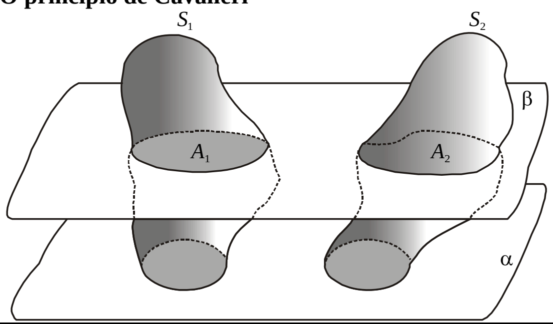
## 9. Princípio de Cavalieri

**Princípio de Cavalieri para áreas**



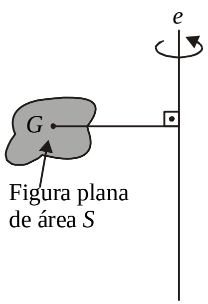

"Sejam $F_1$ e $F_2$ duas figuras planas apoiadas sobre uma mesma reta *r*. Se toda reta *s*, paralela a *r*, determina em $F_1$ e $F_2$ segmentos $d_1$ e $d_2$ congruentes (*os segmentos $d_1$ e $d_2$ são as intersecções da reta s como as figuras $F_1$ e $F_2$*), então as figuras $F_1$ e $F_2$ são equivalentes (*têm áreas iguais*).

**O princípio de Cavalieri**




"Sejam $S_1$ e $S_2$ dois sólidos apoiados sobre um mesmo plano $\alpha$. Se todo plano $\beta$, paralelo a $\alpha$, secciona $S_1$ e $S_2$ segundo figuras planas equivalentes $(A_1 = A_2)$, então os sólidos $S_1$ e $S_2$ têm volumes iguais."

## 10. Teorema de Pappus-Guldin

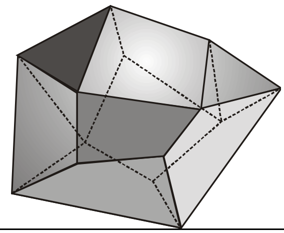



Seja *S* a área de uma figura plana. Ao girar essa figura plana (*de* 360°) em torno do eixo *e*, obtém-se um sólido de revolução. Demonstra-se que o volume desse sólido pode ser calculado pela fórmula $V = 2\pi dS$. Sendo *G* o centro de gravidade da figura, *d* é a distância do ponto *G* à reta *e*.

* É vantagem aplicar a fórmula $V = 2\pi dS$ quando o centro de gravidade da figura é de fácil determinação.
* Em qualquer triângulo, o centro de gravidade é o seu baricentro.
* Em qualquer quadrado, losango ou paralelogramo, o centro de gravidade é a intersecção das suas diagonais.
* Em qualquer polígono regular, o centro de gravidade é o centro da circunferência inscrita (*ou circunscrita*).

## 11. Poliedros

**Poliedro convexo**



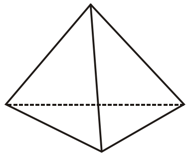
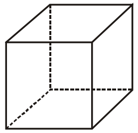
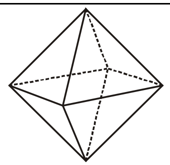
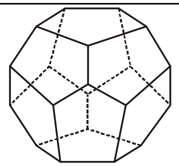
**Em um poliedro convexo com *F* faces, *V* vértices e *A* arestas:**

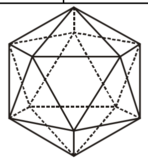
* $V - A + F = 2$
* $S = (V - 2)\,360°$, em que *S* é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

- **Classificação**

| **Poliedros de Platão** (há apenas 5 poliedros de Platão): | **Um poliedro é de Platão somente se**: |
|---|---|
| * tetraedros<br>* hexaedros<br>* octaedros<br>* dodecaedros<br>* icosaedros | **1º)** todas as suas faces são polígonos com o mesmo número de lados;<br>**2º)** em cada um de seus vértices concorre o mesmo número de arestas;<br>**3º)** é Euleriano. |

**Poliedros Regulares**

| | |
|---|---|
|  |  |
| Tetraedro regular | Hexaedro regular |
|  |  |
| Octaedro regular | Dodecaedro regular |



Icosaedro regular

**Um poliedro é regular somente se:**

1º) todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes
2º) possui todos os ângulos poliédricos congruentes

**Observações importantes**

* São os poliedros de Platão com todas as faces formadas por polígonos regulares
* "Todo poliedro regular é de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é regular."