AULA

46

O coeficiente angular

Introdução

O coeficiente angular de uma reta já apareceu na Aula 30. Agora, com os conhecimentos obtidos nas Aulas 40 e 45, vamos explorar mais esse conceito e descobrir novas propriedades. Se necessário, recorde as aulas citadas para compreender bem o que vamos explicar.

Nossa aula

Na aula passada, estudamos a equação ax + by + c = 0, chamada ***equação geral da reta***, e aprendemos a construí-la quando são dados dois de seus pontos.

Repare inicialmente que essa equação pode ser escrita de outra forma: deixando a letra **y** isolada do lado esquerdo da equação. Quando fazemos isso, obtemos uma expressão chamada ***equação reduzida da reta***, que nada mais é do que a nossa conhecida função do 1º grau. Observe o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Escrever a equação $2x - 3y + 3 = 0$ na forma reduzida.

Solução:

Vamos trabalhar a equação dada para deixar a letra **y** sozinha do lado esquerdo:

$$2\mathbf{x} - 3y + 3 = 0$$

$$-3y = -2\mathbf{x} - 3$$

$$3y = 2\mathbf{x} + 3$$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{3}{3}$$

$$y = \frac{2x}{3} + 1$$

Aí está. Essa é a equação reduzida da reta. Ela tem a forma y = mx + p, onde, no nosso exemplo, $m = \frac{2}{3}$ e p = 1

Observe o significado desses números **m** e **p** diretamente na equação que serviu de exemplo. Repare que:

$$y = \frac{2x}{3} + 1$$

se	$x = 0$	então	$y = 1$
se	$x = 3$	então	$y = 3$

Com esses dois pontos, podemos fazer o gráfico da reta.

Veja que a reta corta o eixo dos **y** no ponto y = 1 e que a ***tangente*** do ângulo que ela faz com a direção horizontal é $\frac{2}{3}$ (cateto oposto sobre cateto adjacente).

De forma geral, na equação y = mx + p, o número **p**, chamado ***coeficiente linear***, é o ponto onde a reta corta o eixo dos y.

O número m, chamado ***coeficiente angular*** é a tangente do ângulo que a reta forma com a direção horizontal.

Se o coeficiente angular for ***positivo***, a reta representará uma função ***crescente***, se for ***negativo***, representará uma função ***decrescente***.

Observe, nos exemplos seguintes, que podemos determinar a equação reduzida da reta quando conhecemos os coeficientes angular e linear.

$m = \frac{4}{3}$ (coeficiente angular)

$p = -2$ (coeficiente linear)

Equação reduzida da reta:

$$\mathbf{y} = \frac{4x}{3} - 2$$

$m = \frac{-2}{5}$ (coeficiente angular)

$p = 7$ (coeficiente linear)

Equação reduzida da reta:

$$\mathbf{y} = \frac{-2x}{5} + 7$$

Devemos enfatizar que o coeficiente angular representa o valor que a função cresce (ou decresce) quando **x** aumenta uma unidade. No gráfico a seguir, representamos a função y = mx + p. Nele, você pode notar que, quando **x** assume valores inteiros, os valores de **y** formam uma ***progressão aritmética*** de razão **m**.

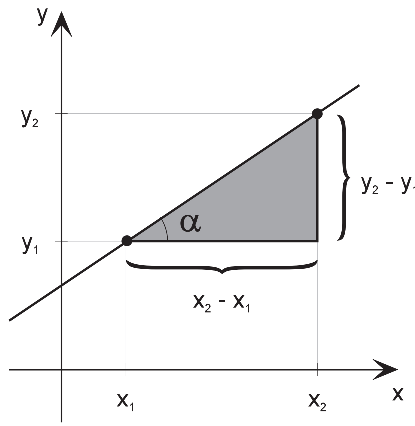
Quando* x *aumenta uma unidade,* y *aumenta* m *unidades.

Gráfico de y = mx + p

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{m}{1} = m$$

A fórmula do coeficiente angular

Veremos, agora, como determinar o coeficiente angular de uma reta a partir de dois quaisquer de seus pontos. Na figura a seguir, mostramos uma reta passando pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). O triângulo retângulo formado tem o cateto vertical igual a $y_2 - y_1$ e o cateto horizontal igual a $x_2 - x_1$. Dividindo o cateto vertical pelo horizontal, obtemos a fórmula do coeficiente angular.



Fórmula do coeficiente angular

$$\boxed{tga = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Por exemplo, se uma reta passa pelos pontos (– 2, 3) e (4, 7), seu coeficiente angular será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{4 - (-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

A seguir, veremos como descobrir o que ocorre com os coeficientes angulares quando duas retas são paralelas ou perpendiculares.

Retas paralelas

Se duas retas são paralelas, então elas formam ângulos iguais com o eixo dos **x**. Portanto elas terão ***coeficientes angulares iguais***.

Assim, por exemplo, as retas y = 2x + 3 e y = 2x – 1 são paralelas porque possuem o mesmo coeficiente angular (m = 2).

EXEMPLO 2

Determinar a equação da reta paralela à reta $y = \frac{1}{2}x + 1$ e que contém o ponto (4, 5).

Solução:

A nova reta terá o mesmo coeficiente angular da reta dada $\left(m = \frac{1}{2}\right)$ e um coeficiente linear diferente. A equação da nova reta será então $y = \frac{1}{2}x + p$.

Como essa reta contém o ponto (4, 5) vamos fazer as substituições x = 4 e y = 5. Assim, determinaremos o coeficiente linear:

$$y = \frac{1}{2}x + p$$

$$5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + p$$

$$5 = 2 + p$$

$$p = 3$$

A equação da nova reta é:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Veja as duas retas na ilustração.

Retas perpendiculares

A figura a seguir mostra duas retas perpendiculares **r** e **s** que, para nossa comodidade, estão passando pela origem.

A reta **r** faz ângulo α com o eixo dos **x** e passa pelo ponto (1, m). A reta **s**, faz ângulo β com o eixo dos **x** e passa pelo ponto (1, – n). Os seus coeficientes angulares são:

Coeficiente angular de r:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{m}{1} = m$$

Coeficiente angular de s:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{-n}{1} = -n$$

Como $\alpha + \beta = 90^o$, o triângulo 1 tem também um ângulo igual a β.

A tangente β nesse triângulo é $\frac{1}{m}$. Então:

$$\text{tg}\ \beta = -n = \frac{1}{m}$$

$$m(-n) = 1$$

$$mn = -1$$

Concluímos então que, quando duas retas são perpendiculares, o ***produto dos coeficientes angulares é* –1**.

Por exemplo, $m = \frac{3}{4}$ e $n = \frac{-4}{3}$ representam coeficientes angulares de retas perpendiculares porque $mn = \frac{3}{4}\beta\frac{4}{3}\gamma = -1$.

EXEMPLO 3

Determine a equação da reta que contém o ponto (1, 3) e é perpendicular à reta $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Solução:

A reta dada possui coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$. A nova reta, como é perpendicular à reta dada, terá coeficiente angular **n** tal que $mn = -1$. Então,

$$\frac{1}{2} \cdot n = -1 \qquad\qquad n = 2$$

A nova reta tem então coeficiente angular igual $a - 2$. Portanto, sua equação será $y = 2x + p$, onde, para calcular **p**, basta substituir nela o ponto (1, 3).

$$y = -2x + p$$

$$3 = -2 \cdot 1 + p$$

$$3 = -2 + p$$

$$p = 5$$

A equação da nova reta é $y = -2x + 5$.

Veja as duas retas na ilustração que se segue:

Resumindo

Equação da reta r: $y = mx + p$

Equação da reta s: $y = nx + q$

***Se* r *e* s *são paralelas então* $m = n$**
***Se* r *e* s *são perpendiculares então* $mn = -1$**

Exercícios

Exercício 1

Determine os coeficientes angular e linear da reta $2x + 3y - 12 = 0$

Exercício 2

A reta **r** na figura passa por dois pontos dados. Observe o gráfico e diga qual é o coeficiente angular de **r**.

Exercício 3

Determine a equação da reta **r** do Exercício 2.

Exercício 4

Qual é o coeficiente angular da reta que contém os pontos $(-1; 3)$ e $(4; -5)$?

Exercício 5

Observe a figura:

a) Determine os coeficientes angulares das retas A e B, C e D.
b) Qual dos coeficientes é o maior?

Exercício 6

A reta **r** contém os pontos (1; 3) e (6; 1). A reta **s** é paralela a **r**, e passa pelo ponto (0, 7). Qual é a equação de **s**?

Sugestão: Use a fórmula do coeficiente angular.

Exercício 7

Determine a equação da reta perpendicular à reta $y = \frac{3}{4}x + 10$ e que contém o ponto (6, 11).

Exercício 8

A figura abaixo mostra que as retas **r** e **s** são perpendiculares a **t**. Determine as equações de **r** e **s**.

Exercício 9

A figura mostra a planta de uma fazenda ABCD, onde cada unidade representa 50 m. Sabe-se que os ângulos em A e C são retos, que AB = 10 e que a posição de C foi determinada pelo triângulo retângulo que aparece na figura. Quanto mede AD?