# Capítulo 7

# Noções de Matemática Financeira

## 1 O valor do dinheiro no tempo

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital $C$ (chamado de *principal*), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital $C$ de volta, acrescido de uma remuneração $J$ pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma $C + J$ é chamada de *montante* e será representada por $M$. A razão $i = J/C$, que é a taxa de crescimento do capital, é sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

**Exemplo 1.** Pedro tomou um empréstimo de R$100,00. Dois meses depois, pagou R$140,00. Os juros pagos por Pedro são de R$40,00 e a taxa de juros é $\frac{40}{100} = 0{,}40 = 40\%$ ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Pedro, é igual a R$100,00 e o montante, que é a dívida de Pedro na época do pagamento, é igual a R$140,00.

O leitor deve ficar atento para o fato que Pedro e quem lhe emprestou o dinheiro concordaram que R$100,00 no início do referido bimestre têm o mesmo valor que R$140,00 no final do referido bimestre. É importante perceber que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Neste exemplo, quantias diferentes (R$100,00 e R$140,00), referidas a épocas diferentes, têm o mesmo valor.

São exemplos de erros comuns em raciocínios financeiros:

a) Achar que R$140,00 têm valor maior que R$100,00. R$140,00 têm maior valor que R$100,00, se referidos à mesma época. Referidos a épocas diferentes, R$140,00 podem ter o mesmo valor que R$100,00 (veja o exemplo anterior) ou até mesmo um valor inferior.

   Todos nós preferiríamos receber R$100 000,00 agora do que R$140 000,00 daqui a seis anos. Com efeito, R$100 000,00 colocados em uma caderneta de poupança, a juros de 0,5% ao mês, cresceriam à taxa de 0,5% ao mês e transformar-se-iam, depois de 72 meses, em $100\,000{,}00 \cdot (1 + 0{,}005)^{72} =$ R$143 204,43.

b) Achar que R$100,00 têm sempre o mesmo valor que R$100,00. Na verdade, R$100,00 hoje valem mais que R$100,00 daqui a um ano.

c) Somar quantias referidas a épocas diferentes. Pode não ser verdade, como mostrará o Exemplo 5, que comprar em três prestações de R$50,00 seja melhor que comprar em cinco prestações de R$31,00, apesar de $50 + 50 + 50 < 31 + 31 + 31 + 31 + 31$.

**Exemplo 2.** Pedro tomou um empréstimo de R$100,00, a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Pedro será acrescida de $0{,}10 \times 100$ reais $=$ $10$ reais de juros (pois $J = iC$), passando a 110 reais. Se Pedro e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 121 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0{,}10 \times 110 = 11$ reais. Esses juros assim calculados são chamados de *juros compostos*. Mais precisamente, no regime de juros compostos os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

*No regime de juros compostos de taxa $i$, um principal $C_0$ transforma-se, após $n$ períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1 + i)^n$.*

Para cada $k$, seja $C_k$ a dívida após $k$ períodos de tempo. Ora, $C_{k+1} = C_k + iC_k = (1+i)C_k$. Portanto, a cada período de tempo a dívida sofre uma multiplicação por $1+i$. Após $n$ períodos de tempo a dívida sofrerá $n$ multiplicações por $1+i$, ou seja, será multiplicada por $(1+i)^n$. Logo, $C_n = C_0(1+i)^n$.

**Exemplo 3.** Pedro toma um empréstimo de R$1 500,00 a juros de 12% ao mês. Qual será a dívida de Pedro três meses depois?

$$C_3 = C_0(1+i)^3 = 1500(1+0{,}12)^3 = 2107{,}39.$$

Outro modo de ler a fórmula $C_n = C_0(1+i)^n$ é: uma quantia, hoje igual a $C_0$, transformar-se-á, depois de $n$ períodos de tempo, em uma quantia $C_n = C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é $A$, equivalerá no futuro, depois de $n$ períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:

- Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.
- Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$.

**Exemplo 4.** Pedro tomou um empréstimo de R$300,00 a juros de 15% ao mês. Um mês após, Pedro pagou R$150,00 e, dois meses após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, R$300,00, na data 0, têm o mesmo valor de R$150,00, um mês após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

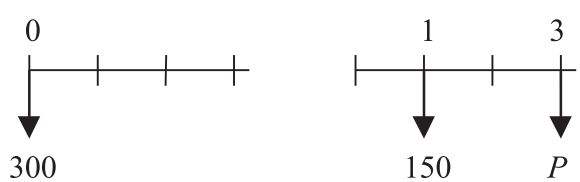


**Figura 47**

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos:

$$300 = \frac{150}{1+0{,}15} + \frac{P}{(1+0{,}15)^3}\,, \text{ ou seja, } 300 = 150 \cdot 1{,}15^{-1} + P \cdot 1{,}15^{-3}.$$

Finalmente, $P = [300 - 150 \cdot 1{,}15^{-1}] \cdot 1{,}15^{-3} = 257{,}89$ reais.

**Exemplo 5.** Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um eletrodoméstico: três prestações mensais de R$50,00 cada, ou cinco prestações mensais de R$31,00. Em qualquer caso, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 5% ao mês para Pedro, qual é a melhor opção que Pedro possui?

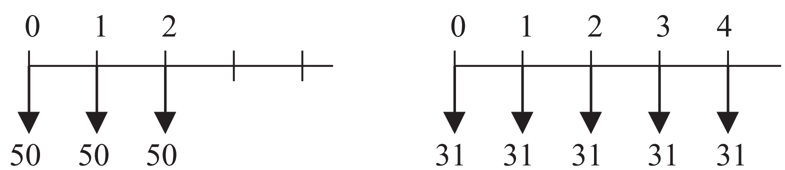


**Figura 48**

Para comparar, determinaremos o valor das duas séries de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2. Temos

$$\begin{aligned} V_1 &= 50(1+0{,}05)^2 + 50(1+0{,}05) + 50 = 157{,}63 \\ V_2 &= 31(1+0{,}05)^2 + 31(1+0{,}05) + 31 + 31/(1+0{,}05) + 31/(1+0{,}05)^2 \\ &= 155{,}37. \end{aligned}$$

Pedro deve preferir o pagamento em cinco prestações.

**Exemplo 6.** Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuário.

a) À vista, com 3% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele, 2,5% ao mês?

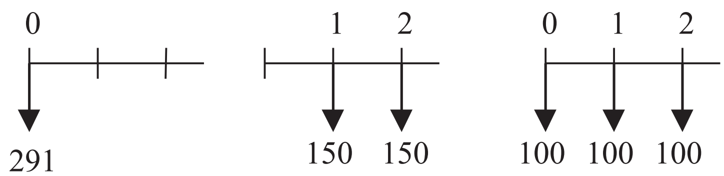


**Figura 49**

Fixando o preço do bem em 300, temos os três esquemas acima. Comparando os valores na época 0, obtemos:

$$V_1 = 291$$
$$V_2 = \frac{150}{1{,}025} + \frac{150}{1{,}025^2} = 289{,}11$$
$$V_3 = 100 + \frac{100}{1{,}025} + \frac{100}{1{,}025^2} = 292{,}74$$

A melhor alternativa para Pedro é a compra em dois pagamentos, e a pior é a compra em três prestações.

É interessante observar que a melhor alternativa para Joaquim pode não ser a melhor alternativa para João.

Se Joaquim é pessoa de poucas posses e decide comprar a prazo, tendo dinheiro para comprar à vista, é provável que ele invista o dinheiro que sobrou, em uma caderneta de poupança que lhe renderia, digamos, 1,5% ao mês. Então, para ele seria indiferente comprar à vista ou a prazo com juros de 1,5% ao mês.

Se João tiver acesso a investimentos melhores, ele poderia fazer render a sobra de dinheiro a, digamos, 2,5% ao mês. Então, seria atrativo para João comprar a prazo com juros de 1,5% ao mês.

Logo, o dinheiro tem valores diferentes para João e Joaquim. Essa taxa de juros que representa o valor do dinheiro para cada pessoa e que é, em suma, a taxa à qual a pessoa consegue fazer render seu dinheiro, é chamada de *taxa mínima de atratividade*. O motivo do nome é claro: para essa pessoa, um investimento só é atrativo se render, no mínimo, a essa taxa.

**Exemplo 7.** Uma loja oferece duas opções de pagamento:

a) À vista, com 30% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Fixando o valor do bem em 100, temos os esquemas de pagamento abaixo:

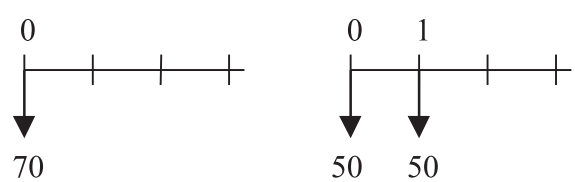


**Figura 50**

Igualando os valores na época 0, obtemos $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$. Daí, $1 + i = 2{,}5$ e $i = 1{,}5 = 150\%$.

A loja cobra juros de 150% ao mês nas vendas a prazo.

**Exemplo 8.** Investindo seu capital a juros mensais de 8%, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?

Temos $C_0(1 + 0{,}008)^n = 2\,C_0$. Daí, $1{,}08^n = 2$ e $n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}08} \cong 9$. Aqui ln está representando o logaritmo natural.

Em aproximadamente nove meses você dobrará o seu capital inicial.

## Problemas Propostos*

**1.** Investindo R$450,00 você retira, após 3 meses, R$600,00. A que taxa mensal de juros rendeu o seu investimento?

**2.** Investindo a 8% ao mês, você obtém, depois de 6 meses um montante de R$1 480,00. Quanto havia sido investido?

**3.** Qual o montante produzido em 3 meses por um principal de R$2 000,00 a juros de 10% ao mês?

**4.** Em que prazo um principal de R$1 400,00 gera um montante de R$4 490,00 a juros de 6% ao mês?

**5.** Laura quer comprar um violão em uma loja que oferece um desconto de 30% nas compras à vista ou pagamento em três prestações mensais, sem juros e sem desconto. Determine a taxa mensal de juros embutida nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento no ato da compra.

**6.** Malu contraiu um empréstimo de R$9 000,00 para ser pago em duas prestações, com vencimentos três e cinco meses depois do empréstimo. Se a segunda prestação é o dobro da primeira e os juros são de 2% ao mês, determine as prestações.

**7.** Regina tem duas opções de pagamento:

a) à vista, com $x$% de desconto.

b) em duas prestações mensais iguais, sem juros, vencendo a primeira um mês após a compra.

Se a taxa mínima de atratividade de Regina é de 5% ao mês, para que valores de $x$ ela preferirá a primeira alternativa?

**8.** Certa loja, no natal de 1992, oferecia a seus clientes duas alternativas de pagamento:

*Soluções na página 189.

a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra.

b) pagamento em três prestações mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.

Se você fosse cliente dessa loja, qual seria a sua opção?

**9.** Certa loja convidou, em dezembro de 1992, os seus clientes a liquidarem suas prestações mensais vincendas, oferecendo-lhes em troca um desconto. O desconto seria dado aos que pagassem, de uma só vez, todas as prestações a vencer em mais de 30 dias e seria de 40% para os que pagassem duas prestações. Supondo uma taxa mínima de atratividade de 27% ao mês, a oferta era vantajosa?

**10.** Lúcia comprou um exaustor, pagando R$180,00, um mês após a compra, e R$200,00, dois meses após a compra. Se os juros são de 2,5% ao mês, qual é o preço à vista?

## 2 Taxas de juros

Os leigos costumam achar que juros de 10% ao mês equivalem a juros de 20% ao bimestre, de 30% ao trimestre, de 120% ao ano etc.

Isso não é verdade, como mostra a tabela a seguir, que dá a evolução de um principal igual a 100, a juros de 10% ao mês.

| Mês | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Capital | 100 | 110 | 121 | 133,1 |

Observe que juros de 10% ao mês equivalem a juros de 21% ao bimestre e de 33,1% ao trimestre.

*Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a* $i$, *a taxa de juros relativamente a* $n$ *períodos de tempo é* $I$ *tal que* $1 + I = (1 + i)^n$.

Basta calcular quanto valerá no futuro, depois de $n$ períodos de tempo, um principal igual a $A$. Se usamos a taxa $i$, devemos avançar $n$ períodos de tempo e, se usamos a taxa $I$, devemos avançar 1 período de tempo. Logo, $A(1 + I)^1 = A(1 + i)^n$ e $1 + I = (1 + i)^n$.

**Exemplo 1.** A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é $I$ tal que $1 + I = (1 + 0{,}12)^{12}$. Daí, $I = 1{,}12^{12} - 1 = 2{,}90 = 290\%$.

**Exemplo 2.** A taxa mensal de juros equivalente a 40% ao ano é $i$ tal que $1 + 0{,}40 = (1 + i)^{12}$. Daí, $1 + i = 1{,}4^{1/12}$ e $i = 1{,}4^{1/12} - 1 = 0{,}0284 = 2{,}84\%$.

Um erro muito comum é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de *taxas proporcionais*, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem. *Taxas proporcionais não são equivalentes.*

**Exemplo 3.** As taxas de 20% ao mês, 60% ao trimestre e 240% ao ano são taxas proporcionais.

Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma expressão como "12% ao ano, com capitalização mensal" significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 12% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. *Portanto, a tradução da expressão "12% ao ano, com capitalização mensal" é "1% ao mês".*

**Exemplo 4.** "24% ao ano com capitalização trimestral" significa "6% ao trimestre"; "1% ao mês com capitalização semestral" significa "6% ao semestre" e "6% ao ano com capitalização mensal" significa "0,5% ao mês".

**Exemplo 5.** Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica?

Ora, o dinheiro de Verônica está, na realidade, investido a juros de taxa $i = 6\% \div 12 = 0{,}5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é $I$ tal que $1 + I = (1 + 0{,}005)^{12}$. Daí, $I = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}061\,7 = 6{,}17\%$ ao ano.

A (falsa) taxa de 6% ao ano é dita *nominal*. A taxa (verdadeira) de 6,17% ao ano é dita *taxa efetiva*.

**Exemplo 6.** A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal é $I$ tal que $1 + I = (1 + 0{,}04)^6$. Daí, $I = 1{,}04^6 - 1 = 26{,}53\%$ ao semestre.

## Problemas Propostos*

**1.** Determine as taxas mensais equivalentes a 100% ao ano e a 39% ao trimestre.

**2.** Determine as taxas anuais equivalentes a 6% ao mês e a 12% ao trimestre.

**3.** Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a:

a) 30% ao ano, com capitalização mensal.

b) 30% ao ano, com capitalização trimestral.

c) $i$ ao ano, capitalizados $k$ vezes ao ano.

## 3 Anuidades

Uma lista de quantias (chamadas usualmente de *pagamentos* ou *termos*), referidas a épocas diversas, é chamada de *série* ou *anuidade* ou, ainda, *renda certa*. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série diz-se *uniforme*.

*O valor atual (isto é, o valor da série uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento) de uma série uniforme de* $n$ *pagamentos iguais a* $P$, *é, sendo* $i$ *a taxa de juros, igual a* $A = P\,\dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$ .

Atenção ao significado das letras na fórmula acima: $i$ é a taxa de juros (referida à unidade de tempo, a qual é o tempo entre prestações consecutivas), $n$ é o número de prestações, $P$ é o valor de cada prestação e $A$ é o valor da série uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento.

*Soluções na página 190.

Com efeito, para determinar o valor da série um tempo antes do primeiro pagamento, devemos retroceder um tempo com o primeiro pagamento, dois tempos com o segundo, ... , $n$ tempos com o $n$-ésimo pagamento. Logo,

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}\,.$$

Multiplicando por $(1+i)$, obtemos

$$A(1+i) = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}}\,.$$

Subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned} A(1+i) - A &= P - \frac{P}{(1+i)^n} \\ Ai &= P - P(1+i)^{-n} \\ A &= P\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

**Exemplo 1.** Um bem, cujo preço à vista é R\$1 200,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, postecipadas (isto é, a primeira é paga um mês após a compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Temos $A = 1\,200$, $n = 8$, $i = 0{,}08$. Aplicando a fórmula, $A = P\,\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtemos:

$$1200 = P\,\frac{1-1{,}08^{-8}}{0{,}08}\,; \quad P = 1200\,\frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-8}} = 208{,}82.$$

As prestações são de R\$208,82.

**Exemplo 2.** Um bem, cujo preço à vista é R\$1 200,00, é vendido em 6 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

O valor da série de prestações um mês antes do pagamento da primeira prestação (ou seja, um mês antes da compra) é $A = P\,\dfrac{1-(1+i)^n}{i} = P\,\dfrac{1-1{,}08^{-6}}{0{,}08}\cdot$ Esse valor é igual ao preço à vista, um mês atrás, isto é, é igual a $\dfrac{1200}{1{,}08}\cdot$ Logo,

$$P\,\frac{1-1{,}08^{-6}}{0{,}08} = \frac{1200}{1{,}08} \quad \text{e} \quad P = \frac{1200}{1{,}08}\,\frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-6}} = 240{,}35.$$

As prestações são de R$240,35.

Às vezes necessitamos calcular o valor futuro (ou montante) de uma série uniforme, isto é, o valor da série na época do último pagamento. Para isso, basta avançar $n$ tempos o valor $A$, isto é,

$$F = A(1+i)^n = P\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^n = P\,\frac{(1+i)^n-1}{i}\cdot$$

*O valor de uma série uniforme na época do último pagamento é* $F = P\,\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ .

**Exemplo 3.** Investindo mensalmente R$150,00 em um fundo de investimentos que rende 0,5% ao mês, qual é o montante imediatamente após o 120º depósito?

O montante da série é

$$F = P\,\frac{(1+i)^n-1}{i} = 150\,\frac{1{,}005^{120}-1}{0{,}005} = 24\,581{,}90.$$

Trataremos agora de *rendas perpétuas*. Rendas perpétuas aparecem em locações. Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, a série dos aluguéis constitui uma renda perpétua ou *perpetuidade*. Para obter o valor atual de uma renda perpétua, basta fazer $n$ tender para infinito na fórmula

$$A = P\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot$$

*O valor de uma perpetuidade de termos iguais a* $P$*, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo* $i$ *a taxa de juros,* $A = \dfrac{P}{i}$ .

**Exemplo 4.** Se o dinheiro vale 1% ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale R$40 00,00?

Quando você aluga um imóvel, você cede a posse do imóvel em troca de uma renda perpétua cujos termos são iguais ao valor do aluguel. Então, o valor do imóvel deve ser igual ao valor da série de aluguéis.

Logo, como $A = \dfrac{P}{i}$, temos $P = Ai = 40\,00 \times 0{,}01 = 400$.

Deve ser alugado por R$400,00.

**Exemplo 5.** Helena tem duas alternativas para obter uma copiadora:

a) Alugá-la por R$480,00 por mês. Nesse caso, o locador se responsabiliza pelas despesas de manutenção.

b) Comprá-la por R$8 000,00. Nesse caso, já que a vida econômica da copiadora é de 2 anos, Helena venderá a copiadora após 2 anos, por R$1 000,00. As despesas de manutenção são de responsabilidade de Helena e são de R$100,00 por mês no primeiro ano e de R$150,00 por mês, no ano seguinte:

Se o dinheiro vale 1% ao mês, qual a melhor opção para Helena?

Na alternativa b), vejamos o valor, na época da compra, dos gastos de Helena durante esses dois anos. Temos:

i) uma parcela de R$8 000,00;

ii) o valor atual de uma série de 12 pagamentos de R$100,00, igual a $100\,\dfrac{1-1{,}01^{-12}}{0{,}01} = \text{R\$}1\,125{,}51$;

iii) o valor, na época da compra, dos gastos no segundo ano. Para determiná-lo, calculamos o valor atual dos gastos no segundo ano, $150\,\dfrac{1-1{,}01^{-12}}{0{,}01} = 1\,688{,}26$, e dividimos esse valor por $1{,}01^{12}$, para trazê-lo um ano para trás, obtendo finalmente R$1 498,25;

iv) o valor, na época da compra, da receita auferida com a venda, R$1 000,00 trazidos dois anos para trás, isto é, $1000 \div 1{,}01^{24} = 787{,}57$.

Portanto, os gastos são de $8\,000 + 1\,125{,}51 + 1\,498{,}25 - 787{,}57 = 9\,836{,}19$.

Na alternativa a), o valor dos gastos na época da compra é o valor atual de uma série de 24 pagamentos iguais a R$480,00, $480\,\dfrac{1-1{,}01^{-24}}{0{,}01} = \text{R\$}10\,196{,}83$.

A melhor alternativa é a compra.

## Problemas Propostos*

**1.** Um televisor, cujo preço à vista é R$900,00, é vendido em dez prestações mensais iguais. Se são pagos juros de 4% ao mês, determine o valor das prestações, supondo a primeira prestação paga:

a) no ato da compra.

b) um mês após a compra.

c) dois meses após a compra.

*Soluções na página 191.

**2.** Se a taxa de juros é de 0,6% ao mês, por quanto se aluga um imóvel cujo preço à vista é R$80 000,00, supondo o aluguel mensal pago vencido? E se fosse pago adiantadamente?

**3.** Supondo juros de 1% ao mês, quanto você deve investir mensalmente durante 10 anos para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$500,00?

**4.** Supondo juros de 1% ao mês, quanto você deve investir mensalmente durante 35 anos para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$1 000,00?

**5.** Considere uma renda perpétua cujos termos crescem a uma taxa constante $j$ e cujo primeiro termo é igual a $P$. Supondo juros de taxa $i$ $(i > j)$, determine o valor da renda na época do primeiro pagamento.

**6.** Minha mulher acha que devemos vender o carro novo que compramos por R$18 000,00 quando ele estiver com dois anos de uso. Conseguiríamos vendê-lo por R$14 000,00 e compraríamos outro igual, zero quilômetro. Eu acho que seria melhor esperar quatro anos para vender o carro, caso em que só conseguiríamos R$10 000,00 na venda, mesmo levando em conta que gastaríamos em consertos cerca de R$1 000,00 no terceiro ano e de R$2 000,00 no quarto ano. Supondo que o dinheiro valha 15% ao ano, quem tem razão?

## APÊNDICE
## Como calcular a taxa de juros utilizando o Excel

Para calcular a taxa de juros em séries uniformes de pagamentos, inicialmente, deve-se clicar na tecla do menu $\boxed{f_x}$.

Com esta operação aparecerá na tela:

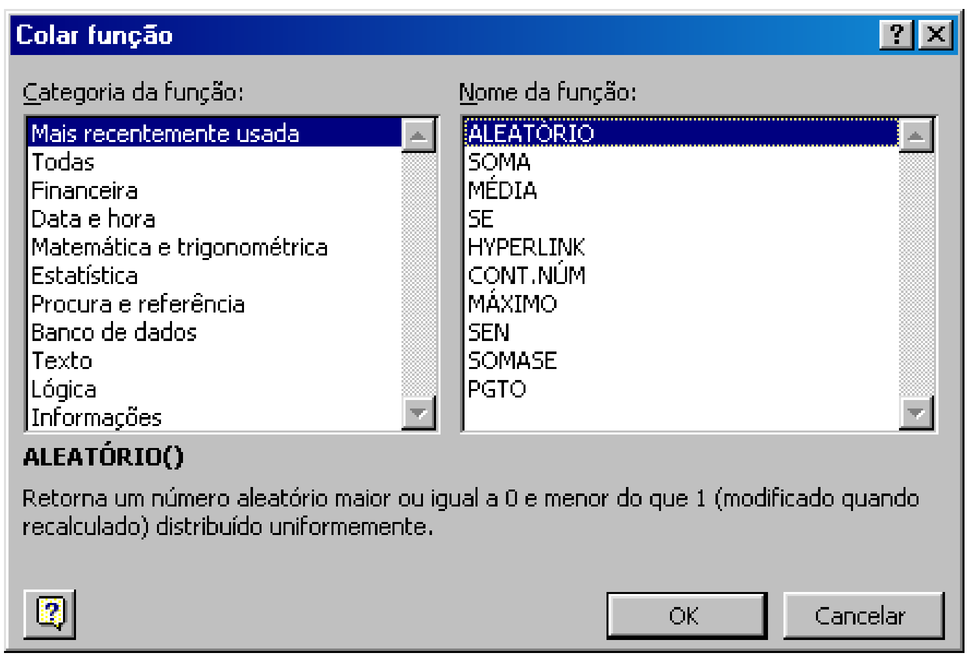


**Figura 51**

Role o cursor no quadro à esquerda e clique em Financeira, como mostra a Figura 52.

Em seguida no quadro à direita procure a função TAXA (Figura 53). Clique OK.

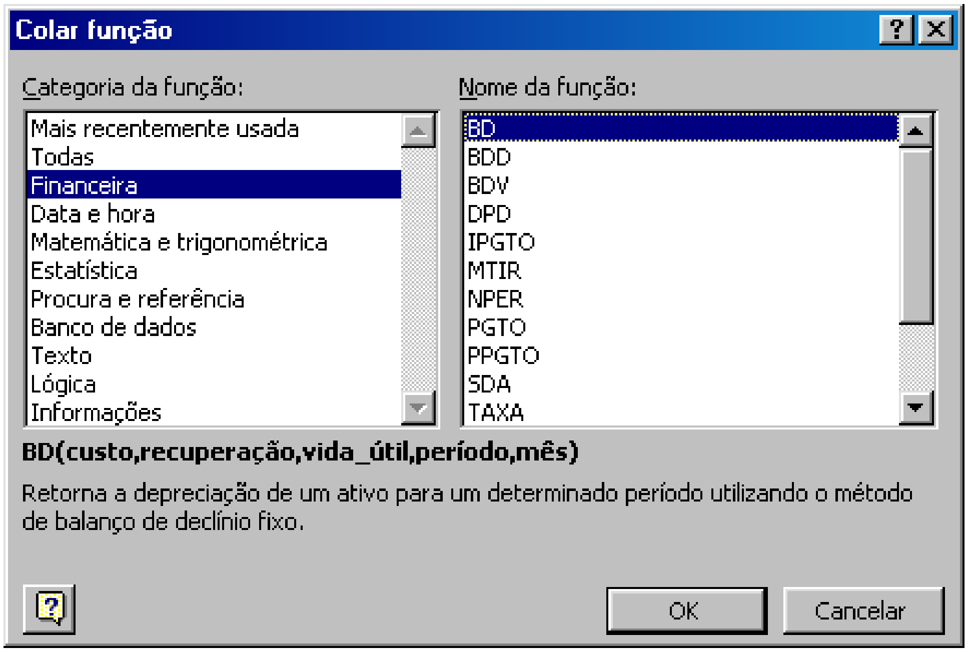


**Figura 52**

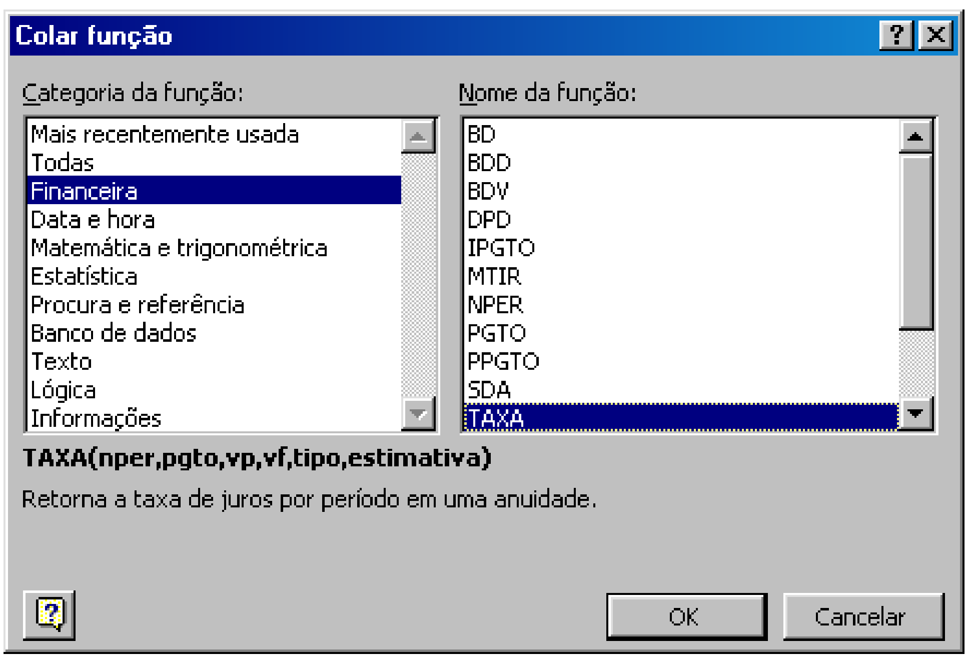


**Figura 53**

Aparecerá uma caixa de diálogo e será necessário preencher algumas janelas:

**Nper** coloque nesta lacuna o número total de termos da série uniforme.

**Pgto** coloque nesta lacuna o número total de termos da série uniforme.

**VP** preencha este quadro com o valor presente (valor atual), com sinal contrário ao pagamento. Se o VF é preenchido esta célula deve ficar em branco.

**Vf** preencha este quadro com o valor futuro, com sinal contrário ao pagamento. Se o Vp é preenchido esta célula deve ficar em branco.

**Tipo** é o número 0 ou 1, conforme os pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando os pagamentos postecipados.

**Estimativa** é a sua estimativa para a taxa. Deixe em branco.

**Observação.** O Excel trabalha com a "lógica do contador", na qual os pagamentos e os recebimentos devem ter sinais contrários. Logo, se o valor presente é um valor positivo, o valor das prestações é obrigatoriamente negativo.

**Exemplo 1.** Qual é a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$8 000,00 e é pago em 24 pagamentos mensais de R$400,00, o primeiro sendo efetuado um mês após a compra?

Preencha Nper $= 24$, Pgto $= -400$ e Vp $= 8\,000$. Aparecerá TAXA $(24; -400; 8000) = 0{,}015130844$, ou seja, 1,51% ao mês.

**Exemplo 2.** Qual é a taxa de juros na compra de um veículo cujo preço à vista é de R$8 000,00 e é pago em 24 pagamentos mensais de R$400,00, o primeiro sendo efetuado no ato da compra?

Preencha Nper $= 24$, Pgto $= -400$, Vp $= 8\,000$, e Tipo $= 1$. Aparecerá TAXA $(24; -400, 8000; ; 1) = 0{,}016550119$, ou seja, 1,66% ao mês.

**Exemplo 3.** O Excel também calcula taxas de juros em séries não-uniformes. Vejamos como calcular a taxa de juros ao ano do financiamento a seguir:

| Ano | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor | 80 | 50 | 50 | 0 | −40 | −40 | −60 | −70 |

Os valores estão em milhares de reais, as entradas de capital foram consideradas positivas e as saídas, negativas.

Inicialmente devemos colocar os valores do fluxo em células adjacentes de uma mesma coluna da planilha, por exemplo, nas células de B1 a B8. Procedendo como anteriormente, usamos os comandos $f_x$, Financeira e TIR (encontra-se imediatamente após TAXA).

Aparecerá uma caixa de diálogo. Par preenchê-la, não digite nada. Com o botão esquerdo do mouse apertado, cubra as células nas quais foi colocado o fluxo de caixa, no caso as células de B1 a B8. Elas ficarão dentro de um retângulo com efeito de movimento na borda e a caixa de diálogo se preencherá sozinha, aparecendo:

VALORES B1:B8

TIR(B1:B8) = 0,031826856

A taxa é de 3,18% ao ano.

## Problemas Propostos*

**1.** Joelma comprou uma geladeira, cujo preço à vista era R$800,00, com uma entrada de R$200,00 e seis prestações mensais de R$120,00. Qual é a taxa mensal dos juros que ela está pagando?

**2.** Manuel comprou um televisor, cujo preço à vista era R$500,00, em dez prestações mensais de R$60,00 cada, vencendo a primeira dois meses após a compra. Qual é a taxa mensal dos juros que ele está pagando?

*Soluções na página 193.

**3.** Uma caixa de funcionários de certa empresa empresta dinheiro a seus associados e calcula os juros de modo peculiar. Para um empréstimo de R$1 000,00, para pagamento em 5 vezes, os juros são de “3% ao mês”, isto é, 15% em 5 meses. Portanto, o total a ser pago é de R$1 150,00, ou seja, 5 prestações de R$230,00 cada. Qual é na realidade a taxa de juros com que trabalha a caixa?