

Soluções dos Problemas do Capítulo 6

Seção 1

1. A resposta da primeira questão pode ser marcada de 5 modos diferentes. A da segunda, também de 5 modos, etc.

A resposta é 5^{10} .

2. Para formar um subconjunto você deve perguntar a cada elemento do conjunto se ele deseja participar do subconjunto. O primeiro elemento pode responder de dois modos: sim ou não. O segundo elemento, de dois modos, etc.

A resposta é 2^n .

3. A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3.

A resposta é $5 \times 4 \times 3 = 60$.

4. A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1.

A resposta é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 460\,800$.

5. O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes.

Vamos contar separadamente os casos que ocorrem conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central.

Se o rei negro ocupar uma casa de canto, haverá 4 posições para o rei negro e 60 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 3 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $4 \times 60 = 240$ modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa lateral que não seja de canto, haverá 24 posições para o rei negro e 58 posições para o rei branco,

pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 5 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $24 \times 58 = 1\,392$ modos de dispor os reis.

Se o rei negro ocupar uma casa central, haverá 36 posições para o rei negro e 55 posições para o rei branco, pois das 64 casas do tabuleiro 1 estará ocupada e as 8 a ela adjacentes não poderão ser ocupadas pelo rei branco. Haverá portanto $36 \times 55 = 1\,980$ modos de dispor os reis. Portanto, a resposta é $240 + 1\,392 + 1\,980 = 3\,612$.

Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior, 1 806.

6. Haverá uma torre em cada linha. A torre da primeira linha pode ser colocada de 8 modos; a da segunda linha, de 7 modos, pois não pode ficar na mesma coluna da anterior, etc. A resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$.

Se as torres são diferentes, devemos primeiramente escolher qual a torre que ficará na primeira linha (8 modos) e depois escolher onde colocá-la na primeira linha (8 modos). Há $8 \times 8 = 64$ modos de colocar a torre da primeira linha. Analogamente, há $7 \times 7 = 49$ modos de colocar a torre da segunda linha etc. A resposta é $64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 1\,625\,702\,400$.

7. Vamos contar separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei.

Se a primeira carta for o rei de copas, a segunda poderá ser selecionada de 48 modos.

Se a primeira carta for de copas sem ser o rei, ela poderá ser selecionada de 12 modos e a segunda, de 47 modos.

A resposta é $1 \times 48 + 12 \times 47 = 612$.

8. Para construir uma função, você deve perguntar a cada elemento de A quem ele deseja flechar em B. O primeiro elemento de A pode fazer sua escolha de 7 modos, o segundo elemento de A pode fazer sua escolha de 7 modos etc. A resposta é $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2\,401$.

Se a função for injetiva, o primeiro elemento de A poderá fazer sua escolha de 7 modos, o segundo elemento de A poderá fazer sua

escolha de 6 modos (pois não poderá escolher o mesmo elemento selecionado pelo primeiro), etc. A resposta é $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

9. a) $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Os divisores positivos de 720 são da forma $\alpha^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, com $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. Há $5 \times 3 \times 2 = 30$ divisores positivos de 720. Uma decomposição de 720 em um produto de dois inteiros positivos, $720 = x \cdot y$, fica determinada quando se escolhe x , que deve ser divisor de 720. Há, portanto, 30 decomposições: 1×720 , 2×360 , 3×120 , ..., 720×1 . Como o enunciado manda considerar iguais as decomposições 1×720 e 720×1 , 2×360 e 360×2 , etc., a resposta é 15.

b) Analogamente, $144 = 2^4 \cdot 3^2$ admite $5 \times 3 = 15$ divisores positivos. Há 15 decomposições, uma das quais é 12×12 . As outras 14 decomposições podem ser agrupadas em 7 pares: 1×144 e 144×1 , 2×72 e 72×2 , etc. Como o enunciado manda considerar iguais as duas decomposições de cada par, a resposta é 8.

10. O armário de número k é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de k . Um armário ficará aberto se for mexido um número ímpar de vezes. Lembre-se que o número de divisores positivos de $k = 2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times \dots$ é igual a $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots$, que é ímpar se e somente se $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ forem todos pares, ou seja, se e somente se k for quadrado perfeito.

Os armários que ficam abertos são os de números 1, 4, 9, 16, ..., 900.

11. Vamos contar separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes.

Pondo cores iguais nos quadrantes 1 e 3, temos $5 \times 4 \times 4 = 80$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor única para os quadrantes 1 e 3, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 4 modos de escolher a cor do quadrante 4. Pondo cores diferentes nos quadrantes 1 e 3, há $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ possibilidades, pois há 5 modos de escolher a cor para o quadrante 1, há 4 modos de escolher a cor do quadrante 3, há 3 modos de escolher a cor do quadrante 2 e há 3 modos de escolher a cor do quadrante 4.

A resposta é $80 + 180 = 260$.

174 Temas e Problemas

12. Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição da letra A figurar na palavra é terrível, pois ela pode figurar uma só vez, ou duas, etc... Por isso é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A. A resposta é $26^5 - 25^5 - 26^4 = 1\,658\,775$.

No caso sem repetição, pode-se contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante, etc. A resposta é $4 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400$. Pode-se também repetir o raciocínio do caso com repetição:

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 - 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 - 1 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 1\,214\,400.$$

13. Há 26 modos de escolher cada letra e 10 modos de escolher cada algarismo.

$$\text{A resposta é } 26^3 \times 10^4 = 175\,760\,000.$$

14. Os 4 que preferem sentar de frente podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos; os que preferem sentar de costas podem fazê-lo de $5 \times 4 \times 3 = 60$ modos; os demais podem se colocar nos lugares restantes de $3 \times 2 \times 1 = 6$ modos.

$$\text{A resposta é } 120 \times 60 \times 6 = 43\,200.$$

15. O 0 aparece nas unidades 222 vezes, nos números 10, 20, 30, ..., 2200. Aparece nas dezenas 220 vezes, nos números 10x, 20x, ..., 220x. Aparece nas centenas 200 vezes, nos números 10xy e 20xy.

$$\text{A resposta é } 222 + 220 + 200 = 642.$$

16. Note que como são permitidas repetições, a condição do 5 figurar no número é terrível, pois ele pode figurar uma só vez, ou duas, etc... É melhor fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura.

$$\text{A resposta é } 9 \times 10 \times 10 \times 10 - 8 \times 9 \times 9 \times 9 = 3\,168.$$

17. Para formar uma coleção, você deve decidir quantas “Veja” farão parte da coleção, etc.

A quantidade de revistas “Veja” pode ser escolhida de 6 modos (0, 1, 2, 3, 4, 5). A de “Época”, de 7 modos. A de “Isto É”, de 5 modos. O número de coleções é $6 \times 7 \times 5 = 210$.

O número de coleções não-vazias é 209.

18. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática. Escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta.

Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática, senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia); em um desses dias, a aula de Física só pode ser posta no horário de um único modo (pois a Matemática já ocupou o outro tempo) e, no outro, pode ser posta de 2 modos. Finalmente, a Química só pode ser posta no horário de um único modo – nos tempos restantes.

A resposta é $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$.

19. O casal João-Maria foi considerado diferente do casal Maria-João. Isso é devido a termos trabalhado com o conceito de primeira pessoa do casal. Por isso a resposta encontrada é o dobro da resposta real.

20. Há três tipos de cartões: os que não podem ser virados de cabeça para baixo, os que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número e os que virados de cabeça para baixo passam a representar números diferentes. Se há x , y e z cartões de cada um desses tipos, respectivamente, a resposta é $x + y + \frac{z}{2}$. É fácil calcular y , $z + y$ e $x + y + z$:

$z + y = 5^5$, pois os cartões que virados de cabeça para baixo continuam representando números são os formados apenas com 0, 1, 6, 8 e 9.

$$x + y + z = 10^5.$$

$y = 5 \times 5 \times 3$, pois os cartões que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número devem ter nas casas extremas um dos pares 11, 00, 88, 69 ou 96. Nas segunda

176 Temas e Problemas

e penúltima casas, a mesma coisa. Finalmente, na casa central deve estar 0, 1 ou 8.

Resolvendo o sistema, encontra-se $z = 3\,050$ e

$$x + y + \frac{z}{2} = 100\,000 - 1\,525 = 98\,475.$$

Seção 2

1.

- a) Cada anagrama é uma permutação simples das letras C, A, P, I, T, U, L, O. O número de anagramas é $P_8 = 8! = 40\,320$.
- b) A escolha da vogal inicial pode ser feita de 4 modos e, depois disso, a vogal final pode ser escolhida de 3 modos. As restantes seis letras podem ser arrumadas entre essas vogais selecionadas de $P_6 = 6! = 720$ modos.

A resposta é $4 \times 3 \times 720 = 8\,640$.

- c) Os anagramas podem começar por vogal ou por consoante. No primeiro caso, devemos arrumar as 4 vogais nos lugares ímpares e as 4 consoantes nos lugares pares, o que pode ser feito de $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$ modos. O segundo caso é análogo.

A resposta é $576 + 576 = 1\,152$.

- d) Tudo se passa como se CAP fosse uma letra só. Portanto devemos arrumar 6 objetos, o bloco CAP e as 5 letras de ITULO. A resposta é $6! = 720$.
- e) Escolha inicialmente a ordem das letras C, A, P, o que pode ser feito de $3! = 6$ modos. Recai-se no item anterior. A resposta é $6 \times 720 = 4\,320$.
- f) Tudo que se tem a fazer é arrumar as 6 letras de CITULO após o PA. A resposta é $6! = 720$.

- g) Ao somar os que têm p em primeiro ($7! = 5\,040$) com os que têm a em segundo ($7! = 5\,040$), os que têm p em primeiro e a em segundo ($6! = 720$) são contados duas vezes. A resposta é $5\,040 + 5\,040 - 720 = 9\,360$. Pode-se também fazer um diagrama de conjuntos.

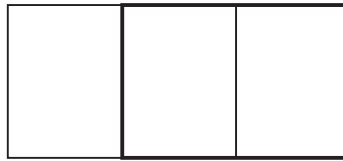


Figura 77

O retângulo de contorno mais claro representa o conjunto dos anagramas que têm p em primeiro lugar e o retângulo de contorno mais escuro representa o conjunto dos anagramas que têm a em segundo lugar. A interseção possui $6! = 720$ elementos e cada retângulo possui $7! = 5\,040$ elementos. Portanto, as regiões do diagrama têm $5\,040 - 720 = 4\,320$, 720 e $4\,320$ elementos.

A resposta é $4\,320 + 720 + 4\,320 = 9\,360$.

- h) Ao somar os que têm p em primeiro ($7! = 5\,040$) com os que têm a em segundo ($7! = 5\,040$) e os que têm c em terceiro ($7! = 5\,040$), os que têm p em primeiro e a em segundo ($6! = 720$), bem como os que têm a em segundo e c em terceiro ($6! = 720$) e os que têm p em primeiro e c em terceiro ($6! = 720$), são contados duas vezes. Devemos, portanto, descontá-los uma vez. Mas, ao fazermos isso, os que têm p em primeiro e a em segundo e c em terceiro ($5! = 120$) terão sido contados três vezes e descontados três vezes. Devemos contá-los uma vez.

A resposta é $5\,040 + 5\,040 + 5\,040 - 720 - 720 - 720 + 120 = 13\,080$.

Poderíamos ter feito um diagrama de três conjuntos: os que têm p em primeiro, os que têm a em segundo e os que têm c em terceiro lugar. Cada um desses conjuntos tem $7! = 5\,040$ elementos, as interseções dois a dois têm $6! = 720$ elementos

178 Temas e Problemas

e a interseção dos três conjuntos tem $5! = 120$ elementos. As sete regiões internas do diagrama terão 3 720, 3 720, 3 720, 600, 600, 600 e 120 elementos.

A resposta é $3\,720 + 3\,720 + 3\,720 + 600 + 600 + 120 = 13\,080$.

- i) Há $3! = 6$ ordens possíveis para essas letras. A resposta é $\frac{1}{6}$ do total de anagramas, $\frac{1}{6}$ de $8!$, que é igual a 6 720.

Também poderíamos escolher 3 das 8 posições do anagrama para colocar essas três letras ($C_8^3 = 56$ modos), colocá-las na ordem *apc* (1 modo) e arrumar as 5 outras letras nos 5 lugares restantes ($5! = 120$ modos). A resposta é $56 \times 1 \times 120 = 6\,720$.

- j) Há $4! = 24$ ordens possíveis para as vogais. A resposta é $\frac{1}{24}$ do total de anagramas, $\frac{1}{24}$ de $8!$, que é igual a 1 680.

Também poderíamos escolher 4 das 8 posições do anagrama para colocar as vogais ($C_8^4 = 70$ modos), colocar as vogais nos lugares escolhidos (1 modo, pois elas devem entrar em ordem alfabética) e arrumar as 4 consoantes nos 4 lugares restantes ($4! = 24$ modos). A resposta é $70 \times 1 \times 24 = 1\,680$.

- 2.** A imagem do primeiro elemento de A pode ser selecionada de n modos, a do segundo, de $n - 1$ modos, etc.

A resposta é $n \cdot (n - 1) \dots 1 = n!$

- 3.** Do total de arrumações ($8! = 40\,320$), devem ser descontadas aquelas nas quais elas ficam juntas ($2! \times 7! = 10\,080$, pois elas podem ficar juntas em $2!$ ordens possíveis). A resposta é $40\,320 - 10\,080 = 30\,240$.

- 4.** Do total de arrumações com Helena e Pedro juntos ($2! \times 7! = 10\,080$), devem ser descontadas aquelas nas quais Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos ($2! \times 2! \times 6! = 2\,880$). A resposta é $10\,080 - 2\,880 = 7\,200$.

5. Você deve escolher 5 jogadores para o Esporte, depois escolher 5 dos que sobraram para o Tupi e formar o Minas com os restantes. A resposta é $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot C_5^5 = 3\,003 \times 252 \times 1 = 756\,756$.

Ou, então, ponha os 15 jogadores em fila: os 5 primeiros formam o Esporte, os 5 seguintes o Tupi, os 5 últimos o Minas. Note que, trocando a ordem dentro de cada bloco, você muda a fila, mas não muda a divisão em times. A resposta é $\frac{15!}{5!5!5!} = 756\,756$.

6. A resposta é a anterior dividida por $3! = 6$, pois agora, trocando os times entre si, a divisão é a mesma, ou seja, a resposta é $\frac{756\,756}{6} = 126\,136$.

7. Ponha os 20 objetos em fila, o que pode ser feito de $20!$ modos: os 3 primeiros formam o “primeiro” grupo de 3, os 3 seguintes formam o “segundo” grupo de 3, etc.

Note que, trocando a ordem dos elementos dentro de cada grupo, você muda a fila mas não muda a divisão em grupos. Note também que trocando os grupos de 3 entre si (o que pode ser feito de $4!$ modos) e os de 4 entre si (o que pode ser feito de $2!$ modos), você muda a fila mas não muda a divisão em grupos.

A resposta é $\frac{20!}{(3!)^4(4!)^24!2!} = 67\,897\,830\,000$.

Você também poderia pensar assim: Há C_{20}^3 modos de escolher o “primeiro” grupo de 3, C_{17}^3 modos de escolher o “segundo” grupo de 3, etc. Note que trocando os grupos de 3 entre si (o que pode ser feito de $4!$ modos) e os de 4 entre si (o que pode ser feito de $2!$ modos), você não muda a divisão em grupos.

A resposta é $\frac{C_{20}^3 C_{17}^3 C_{14}^3 C_{11}^3 C_8^4 C_4^4}{4!2!} = 67\,897\,830\,000$.

8. Devemos colocar os 12 times nos 12 lugares de uma matriz 6×2 . Note que trocar as linhas entre si, ou trocar em uma linha a ordem dos elementos, não altera a seleção dos jogos.

A resposta é $\frac{12!}{6!(2!)^6} = 10\,395$.

Você também poderia pensar assim: Tenho 11 modos de escolher o adversário do Botafogo; depois tenho 9 modos de escolher

180 Temas e Problemas

o adversário do primeiro (em ordem alfabética) time que sobrou; depois tenho 7 ...

A resposta é $11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 10\,395$.

9. a) Para descobrir o lugar do 62 417 você tem que contar quantos números o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1 ($4! = 24$), em 2 ($4! = 24$), em 4 ($4! = 24$), em 61 ($3! = 6$) e em 621 ($2! = 2$). Antecedem-no $24 + 24 + 24 + 6 + 2 = 80$ números. Ele ocupa o 81º lugar.

b) Vamos contar os números (mas não um a um, naturalmente)

Começados por	Quantidade	Acumulado
1	$4!=24$	24
2	$4!=24$	48
41	$3!=6$	54
42	$3!=6$	60
46	$3!=6$	66

O 66º número escrito é o último (ou seja, o maior) dos começados por 46.

A resposta é 46 721.

c) $166 = 5 \times 33 + 1$.

Portanto, para escrever 166 algarismos, devemos escrever 33 números completos e mais um algarismo.

O 166º algarismo escrito é o 1º algarismo do 34º número.

Os $4! = 24$ primeiros números começam em 1 e os 23 seguintes começam em 2. O 34º número começa em 2.

A resposta é 2.

d) A soma das unidades dos números é $(1 + 2 + 4 + 6 + 7) \cdot 4! = 480$, pois cada um dos algarismos 1, 2, 4, 6, 7 aparece como algarismo das unidades em $4!$ números. Analogamente, a soma das dezenas é 480 dezenas, ou seja, 4 800. A das centenas é 48 000, a das unidades de milhar é 480 000 e a das dezenas de milhar é 4 800 000.

A resposta é $480 + 4\,800 + 48\,000 + 480\,000 + 4\,800\,000 = 5\,333\,280$.

Um truque, bonito mas truque, é agrupar os $5! = 120$ números em 60 casais do seguinte modo: o cônjuge de cada número é o número que dele se obtém trocando a posição do 1 com o 7 e a posição do 2 com o 6. Teremos 60 casais e a soma em cada casal é 88 888. A resposta é $88\,888 \times 60 = 5\,333\,280$.

10. Há $m!$ modos de escolher a ordem das moças. Feito isso, devemos arrumar em fila $r+1$ objetos, os r rapazes e o bloco das moças, o que pode ser feito de $(r+1)!$ modos. A resposta é $m!(r+1)!$.

11. a) Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é $6! = 720$.

b) Agora, quando mudamos o cubo de posição obtemos o mesmo dado. Por exemplo, considere um dado com o 1 e o 6 em faces opostas. Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era diferente de colocar o 6 em cima e o 1 em baixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Para determinar esse número, repare que há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um cubo é $6 \times 4 = 24$. A resposta é $\frac{720}{24} = 30$.

Podemos também pensar diretamente: Todo dado pode ser imaginado com o 1 na face de baixo; se o 1 estiver em outro lugar, sempre se poderá virar o dado para que o 1 fique em baixo.

Há 5 modos de escolher o número que ficará na face oposta ao 1, ou seja, na face de cima; digamos que se tenha escolhido o 6 para a face de cima. Agora devemos colocar os números 2, 3, 4 e 5 nas 4 faces restantes: frontal, traseira, direita e esquerda. O 2 sempre poderá ser imaginado na face da frente; se o 2 estiver em outra face, basta rodar o dado para que o 2 fique na face da frente.

Há 3 modos de escolher o número que ficará na face oposta a 2, ou seja, na face de trás; digamos que tenhamos escolhido o 4 para a face de trás. Note que agora não há mais movimentos possíveis para o dado: qualquer movimento ou tirará o 1 de baixo ou tirará o 2 da frente.

182 Temas e Problemas

Agora temos que colocar o 3 e o 5 nas faces direita e esquerda, o que pode ser feito de 2 modos distintos.

A resposta é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

c) Todo dado pode ser imaginado com o 1 em baixo, o que obriga a colocação do 6 em cima. O 2 sempre pode ser posto na face da frente, o que obriga a colocação do 5 na face de trás. Agora temos que colocar o 3 e o 5 nas faces direita e esquerda, o que pode ser feito de 2 modos distintos. A resposta é 2.

12. Tetraedro: Há 4 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um tetraedro é $4 \times 3 = 12$.

A resposta é $\frac{4!}{12} = 2$.

Octaedro: Há 8 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um octaedro é $8 \times 3 = 24$.

Você também poderia imaginar o octaedro com um vértice em baixo. Há 6 modos de escolher o vértice que fica em baixo e 4 modos de escolher, dentre as arestas que o contêm, a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um octaedro é $6 \times 4 = 24$.

A resposta é $\frac{8!}{24} = 1\,680$.

Dodecaedro: Há 12 modos de escolher a face que fica em baixo e 5 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um dodecaedro é $12 \times 5 = 60$.

A resposta é $\frac{12!}{60} = 7\,983\,360$.

Icosaedro: Há 20 modos de escolher a face que fica em baixo e 3 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente. O número de posições de colocar um icosaedro é $20 \times 3 = 60$.

A resposta é $\frac{20!}{60}$.

13. $P_9^{2,2,1,1,1,1,1} = \frac{9!}{2!2!1!1!1!1!1!} = 90\,720$.

14. C_n^p .

15. Há $C_8^4 = 70$ modos de escolher as matérias para o primeiro dia e, depois disso, um só modo de escolher as do segundo dia. A resposta é $70 \times 1 = 70$.

16. Os segmentos que ligam dois vértices são diagonais, arestas ou diagonais de faces. Portanto o número de diagonais é o número de combinações de classe 2 dos vértices menos as arestas menos as diagonais das faces.

a) O octaedro regular é formado por 8 faces triangulares e possui 6 vértices e 12 arestas. Como não há diagonais de faces, a resposta é $C_6^2 - 12 = 15 - 12 = 3$.

b) O icosaedro regular é formado por 20 faces triangulares e possui 12 vértices e 30 arestas. Como não há diagonais de faces, a resposta é $C_{12}^2 - 30 = 66 - 30 = 36$.

c) O dodecaedro regular é formado por 12 faces pentagonais e possui 20 vértices e 30 arestas. Como cada face possui $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ diagonais e são 12 faces, há $5 \times 12 = 60$ diagonais de faces. A resposta é $C_{20}^2 - 30 - 60 = 190 - 90 = 100$.

d) O cubo é formado por 6 faces quadradas e possui 8 vértices e 12 arestas. Como cada face possui 2 diagonais e são 6 faces, há $6 \times 2 = 12$ diagonais de faces. A resposta é $C_8^2 - 12 - 12 = 28 - 24 = 4$.

e) O prisma hexagonal é formado por 6 faces quadrangulares e duas faces hexagonais e possui 12 vértices e 18 arestas. Como cada face quadrangular possui 2 diagonais e cada face hexagonal possui $\frac{6(6-3)}{2} = 9$ diagonais, há $6 \times 2 + 2 \times 9 = 30$ diagonais de faces. A resposta é $C_{12}^2 - 18 - 30 = 66 - 48 = 18$.

Também se poderia pensar assim: Chamando as faces hexagonais de A e B, as diagonais ligam um vértice de A a um vértice de B. Há 6 modos de escolher o vértice de A e, depois disso, 3 modos de escolher o vértice de B. A resposta é $6 \times 3 = 18$.

17. A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem, o que pode ser feito de C_n^m modos. Com efeito, escolhidos os elementos que formarão a imagem, a função está determinada pois $f(1)$ deve ser igual ao menor dos elementos escolhidos, $f(2)$ deve ser igual ao menor dos elementos restantes, etc.

A resposta é C_n^m .

18. Ignore o problema do 0 na primeira casa. A escolha dos lugares para os 4 pode ser feita de $C_7^3 = 35$ modos; depois disso, a escolha dos lugares para os 8 pode ser feita de $C_4^2 = 6$ modos; as casas restantes podem ser preenchidas de $8 \times 8 = 64$ modos, o que daria para resultado $35 \times 6 \times 64 = 13\,440$. Devemos descontar os números começado em 0. Para formar um número começado em 0, devemos escolher os lugares para os 4 ($C_6^3 = 20$ modos), para os 8 ($C_6^2 = 3$ modos) e preencher a casa restante (8 modos). Há $20 \times 3 \times 8 = 480$ números começados em 0. A resposta é $13\,440 - 480 = 12\,960$.

19.

a) Basta escolher os $p - 1$ companheiros de a_1 dentre os $n - 1$ demais elementos. A resposta é C_{n-1}^{p-1} .

b) Basta escolher os p elementos dentre os $n - 1$ elementos diferentes de a_1 . A resposta é C_{n-1}^p .

Também se poderia fazer o total das combinações e delas subtrair aquelas das quais o elemento a_1 participa, obtendo a resposta $C_n^p - C_{n-1}^{p-1}$.

c) Basta escolher os $p - 2$ companheiros de a_1 e a_2 dentre os $n - 2$ demais elementos. A resposta é C_{n-2}^{p-2} .

d) Há C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_1 figura e C_{n-1}^{p-1} combinações em que o elemento a_2 figura. Somando, teremos contado duas vezes as C_{n-2}^{p-2} combinações que contêm a_1 e a_2 . A resposta é $2C_{n-1}^{p-1} - C_{n-2}^{p-2}$.

Também se poderia fazer o total de combinações C_n^p e excluir as C_{n-2}^p que não contêm nem a_1 nem a_2 . A resposta é $C_n^p - C_{n-2}^p$.

Também se poderia somar as combinações que contêm a_1 mas não a_2 (C_{n-2}^{p-1}), com as que contêm a_2 mas não a_1 , com as que contêm ambos (C_{n-2}^{p-2}). A resposta é $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

- e) Há C_{n-2}^{p-1} combinações que contêm a_1 mas não a_2 e C_{n-2}^{p-1} combinações que contêm a_2 mas não a_1 . A resposta é $2C_{n-2}^{p-1}$.

Também se poderia contar as combinações que contêm pelo menos um dos dois elementos e descontar as que contêm ambos, obtendo a resposta $2C_{n-1}^{p-1} - 2C_{n-2}^{p-2}$ ou $C_n^p - C_{n-2}^p - C_{n-2}^{p-2}$ ou $2C_{n-2}^{p-1}$.

20.

- a) Essas funções são bijetoras. A resposta é $n!$.
- b) Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias. Há n modos de escolher aquele elemento de B e C_{n+1}^2 modos de escolher sua imagem inversa. Agora sobram $n-1$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles, que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-1)!$ modos. A resposta é $n \cdot C_{n+1}^2 \cdot (n-1)! = \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$.
- c) Há duas possibilidades: um elemento de B tem sua imagem inversa formada por três elementos e os demais têm imagens inversas unitárias ou dois elementos de B têm imagens inversas formadas por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

No primeiro caso há n modos de escolher o elemento de B e C_{n+2}^3 modos de escolher sua imagem inversa. Agora sobram $n-1$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles, que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-1)!$ modos.

No segundo caso há C_n^2 modos de escolher os dois elementos de B e $C_{n+2}^2 \cdot C_n^2$ modos de escolher suas imagens inversas. Agora sobram $n-2$ elementos em cada conjunto e a correspondência entre eles,

que deve ser um-a-um, pode ser feita de $(n-2)!$ modos. A resposta é

$$\begin{aligned} n \cdot C_{n+2}^3 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot C_{n+2}^2 \cdot C_n^2 \cdot (n-2)! &= \\ = \frac{n \cdot (n+2)!}{6} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n+2)!}{8} &= \\ = \frac{n \cdot (3n+1) \cdot (n+2)!}{24}. \end{aligned}$$

21. O número de modos de escolher 3 dos 20 pontos é $C_{20}^3 = 1140$. Assim, o plano determinado pelos 8 pontos é contado $C_8^3 = 56$ vezes. A resposta é $1140 - 55 = 1085$.

Poder-se-ia também contar separadamente os planos determinados por três dentre os doze pontos ($C_{12}^3 = 220$), por dois dentre os doze e um dentre os oito ($C_{12}^2 \cdot 8 = 528$), por um dentre os doze e dois dentre os oito ($12 \cdot C_8^2 = 336$) e por três dentre os oito (1 plano apenas). A resposta é $220 + 528 + 336 + 1 = 1085$.

22. Escolhida a ordem em que cada casal vai se sentar (marido à direita, mulher à esquerda ou vice-versa), o que pode ser feito de $2 \times 2 \times 2 = 8$ modos, você tem que formar uma fila (de 7 lugares) com 3 casais e 4 lugares vazios. Há 7 modos de colocar o primeiro casal, 6 de colocar o segundo e 5 de colocar o terceiro. A resposta é $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

23. Vamos arrumar primeiramente apenas as vogais, o que pode ser feito de $\frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$ modos, e depois entremear as consoantes.

Se as vogais estiverem, por exemplo, na ordem A A U A I O , haverá 7 possibilidades para a colocação do P, 6 para o R e 5 para o G.

A resposta é $120 \times 7 \times 6 \times 5 = 25200$.

24. Marque, no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, com o sinal $+$ os elementos selecionados para o subconjunto e com o sinal $-$ os elementos não selecionados. Você tem que formar uma fila com p sinais $+$

e $n - p$ sinais $-$, sem que haja dois sinais $+$ adjacentes. Faça uma fila com os sinais $-$ (um único modo) e entremeie os sinais $+$. Há $n - p + 1$ espaços entre os sinais $-$ (e antes do primeiro e depois do último) dos quais devemos selecionar p para colocar os sinais $+$, o que pode ser feito de C_{n-p+1}^p modos. A resposta é C_{n-p+1}^p .

25. a) Um grupo de 4 cientistas, ABCD, é barrado por pelo menos um cadeado. Na situação do número mínimo de cadeados, por exatamente um cadeado. Batizemos esse cadeado de ABCD. A, B, C e D não têm a chave desse cadeado e todos os outros cientistas a têm. Como a correspondência entre os cadeados e seus nomes é um-a-um, basta contar quantos são os nomes dos cadeados, $C_{11}^4 = 330$.

b) Cada cientista possui as chaves dos cadeados que não o contêm no nome, $C_{10}^4 = 210$.

Você também poderia pensar que há 330 cadeados e de cada cadeado há 7 cópias de chaves. O total de chaves é $330 \times 7 = 2310$. Cada cientista possui $2310 \div 11 = 210$ chaves. Observe que neste raciocínio partimos do fato de que todos os cientistas têm o mesmo número de chaves.

26. Um bom nome para o professor que pertence às bancas 1 e 2 é professor 1 - 2. O número de professores é $C_8^2 = 28$. Em cada banca há 7 professores.

27. Há $4! = 24$ modos de formar uma roda com as meninas. O primeiro menino pode ser posto na roda de 5 modos; o segundo, de 4, etc. A resposta é $24 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2880$.

28. O número de rodas que podem ser formadas sem a participação de Vera é $4! = 24$. Há 3 modos de colocar Vera na roda. A resposta é $24 \times 3 = 72$.

29. Chamando x de $1 + a$, y de $1 + b$ e z de $1 + c$, você tem de determinar soluções inteiras e não-negativas para $a + b + c = 4$. A resposta é $CR_3^4 = C_6^4 = 15$.

188 Temas e Problemas

30. Defina, para cada solução, a folga, que é a diferença entre o valor máximo que $x + y + z$ poderia atingir e o valor que $x + y + z$ realmente atinge. Por exemplo, a solução $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ tem folga 2. Cada solução da inequação $x + y + z \leq 6$ corresponde a uma solução da equação $x + y + z + f = 6$ e vice-versa. A resposta é $CR_4^6 = C_9^6 = 84$.

31. $CR_5^{20} = C_{24}^{20} = 10\,626$.