

## Soluções dos Problemas do Capítulo 4

### Problema 1

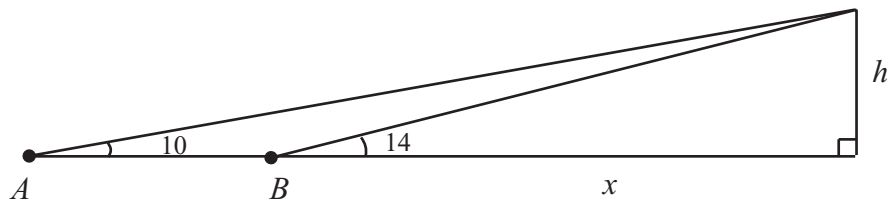


Figura 57

Seja  $h$  a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano horizontal de medição e seja  $x$  a distância de  $B$  ao pé da altura (Figura 57). Nos dois triângulos retângulos formados no plano vertical temos:

$$\frac{h}{x} = \operatorname{tg} 14^\circ = 0,2493$$

$$\frac{h}{650 + x} = \operatorname{tg} 10^\circ = 0,1763$$

Resolvido este sistema, obtemos  $h = 391,4$ .

### Problema 2

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $ABP$  (Figura 58) temos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 9^\circ} = \frac{x}{\operatorname{sen} 52^\circ} \quad \text{donde} \quad x = \frac{0,7880}{0,1564} = 5,04.$$

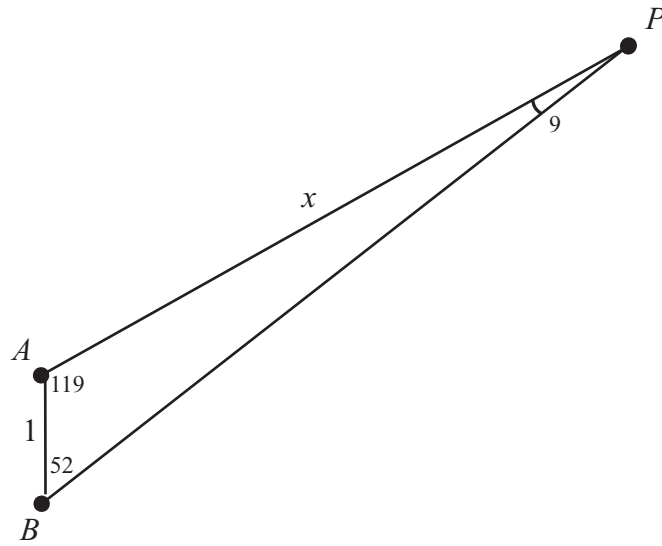
### Problema 3

É fácil calcular os seguintes ângulos (Figura 59):

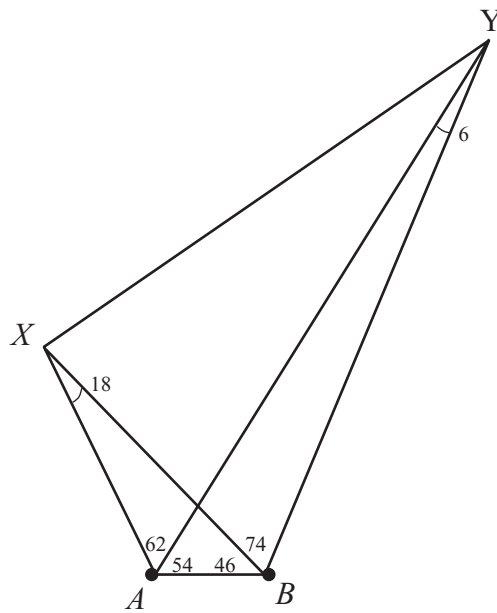
$$\widehat{AXB} = 18^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{AYB} = 6^\circ$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo  $XAB$  temos:

$$\frac{XA}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} 18^\circ},$$



**Figura 58**



**Figura 59**

o que fornece  $XA = 1,328$ . Sendo  $\widehat{A\hat{B}Y} = 120^\circ$ , novamente a lei dos senos fornece:

$$\frac{YA}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{1}{\text{sen } 6^\circ},$$

o que dá  $YA = 8,285$ . No triângulo  $AXY$  usamos agora a lei dos cossenos:

$$XY^2 = XA^2 + YA^2 - 2 \cdot XA \cdot YA \cdot \cos(\widehat{X\hat{A}Y})$$

e os cálculos indicam  $XY = 7,48$ .

#### Problema 4

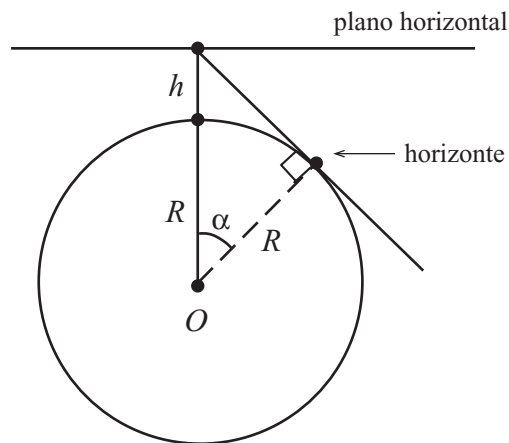


Figura 60

Observando a Figura 60, vemos que o ângulo  $\alpha$  entre a horizontal e a linha de visada ao horizonte, aparece também no centro da Terra. Daí,

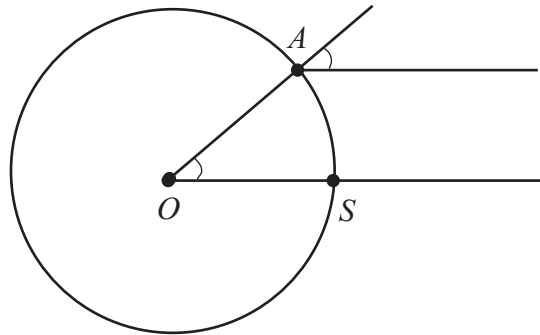
$$\cos \alpha = \frac{R}{h + R}$$

e, portanto,

$$R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Para  $h = 0,703$  km e  $\alpha = 0,85^\circ$  encontra-se  $R = 6633$  km.

O raio médio da Terra é de cerca de 6 370 km. O resultado encontrado é bastante razoável.

**Problema 5****Figura 61**

Se  $\alpha = \frac{360^\circ}{50}$  então o comprimento da circunferência da Terra é 50 vezes o comprimento do arco SA, ou seja 250 000 estádios ou 40 250 km. Daí,  $R = \frac{40250}{2\pi} = 6409$  km, um resultado muito bom.

**Problema 6**

1) Os comprimentos de AC e BC são proporcionais respectivamente a 8 e 9 (Figura 62). Daí, pela lei dos senos,

$$\frac{9k}{\text{sen } 110^\circ} = \frac{8k}{\text{sen } \theta}$$

Encontramos  $\text{sen } \theta = 0,835$  e como  $\theta$  é um ângulo agudo, tem-se  $\theta = 56,6^\circ$ .

2) Veja a Figura 63.

$$\frac{8,1}{\text{sen } 110^\circ} = \frac{8}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \theta = 68,14^\circ$$

Logo,  $\widehat{ACB} = 1,86^\circ$ .

$$\frac{BC}{\text{sen } 110^\circ} = \frac{50}{\text{sen } 1,86^\circ} \Rightarrow BC = 1448 \text{ m.}$$

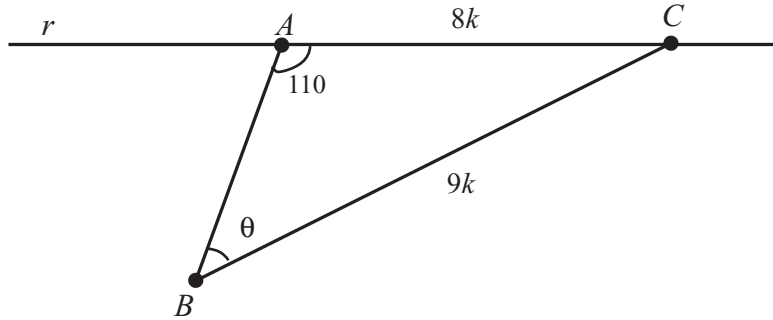


Figura 62

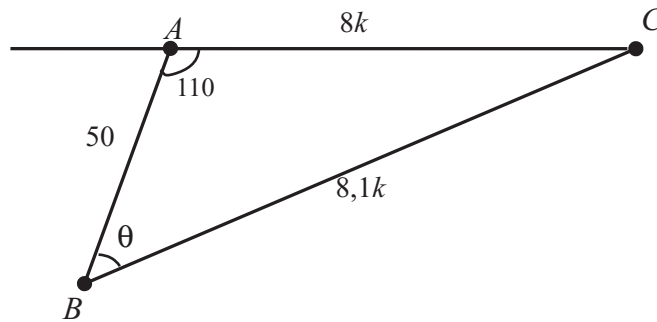


Figura 63

**Problema 7**

Como a velocidade de A é 15% maior que a de B, então os lados BC e AC do triângulo são respectivamente proporcionais a 1 e 1,15 (Figura 64). Daí,

$$\frac{1}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{1,15}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0,99593.$$

Mas, isto fornece  $\theta = 84,8^\circ$  ou  $\theta = 180^\circ - 84,8^\circ = 95,2^\circ$ .

**Por que há duas respostas?**

Imagine a seguinte situação. Os vértices A e B do triângulo ABC são fixos e a razão entre os lados CA e CB é constante (Figura 65).

Vamos mostrar que nestas condições o lugar geométrico de C é uma circunferência.

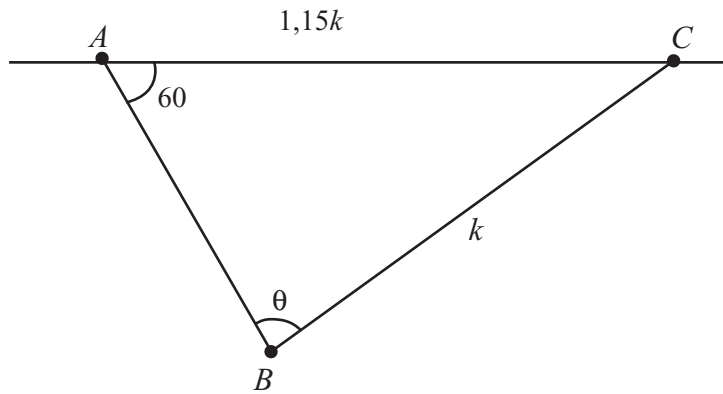


Figura 64

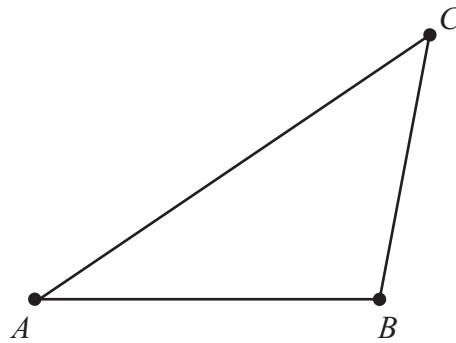


Figura 65.  $\frac{CA}{CB} = r$ , constante. Qual é o lugar geométrico do vértice C?

Dividamos o segmento AB harmonicamente na razão r. Isto significa encontrar os pontos M e N da reta AB, um interior ao segmento AB e outro exterior, tais que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = r.$$

Como  $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$ , então CM é bissetriz do ângulo interno C do triângulo ABC (recorde o teorema das bissetrizes e sua recíproca).

Como  $\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$ , então CN é bissetriz do ângulo externo C do triângulo ABC (Figura 66).

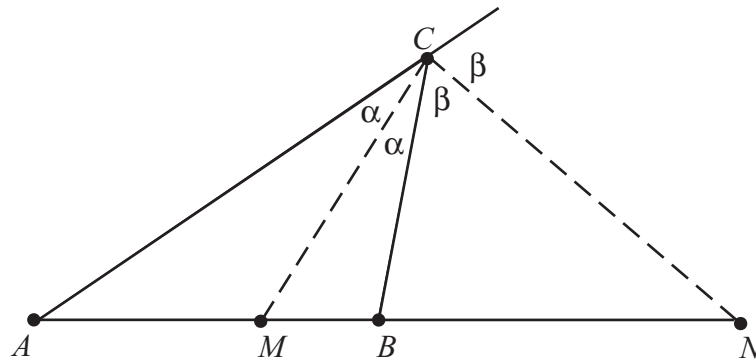


Figura 66

Ora, os pontos M e N são fixos e o ângulo MCN é reto. Logo, C está sobre a circunferência de diâmetro MN (Figura 67).

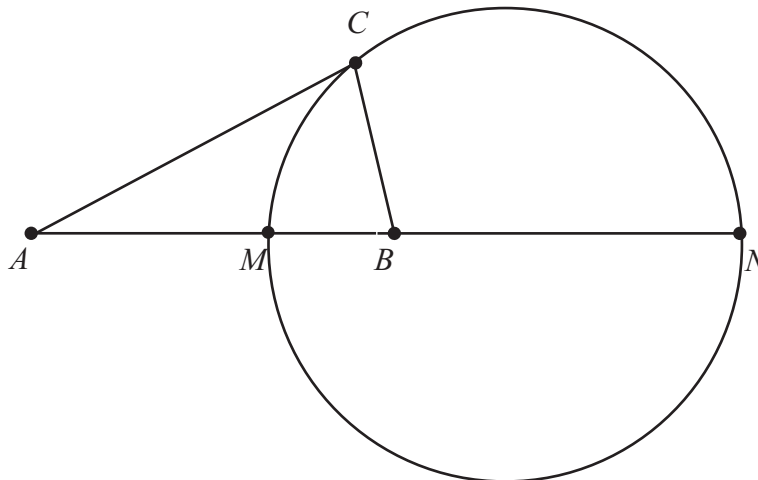


Figura 67

Este lugar geométrico chama-se “circunferência de Apolônio” do segmento AB na razão  $r$ .

Voltemos então ao problema.

Se A e B são fixos e  $\frac{CA}{CB} = 1,15$  então C está na circunferência de Apolônio do segmento AB e nessa razão. Como C está na reta  $r$ , então a solução é a interseção dessas duas figuras.

## 162 Temas e Problemas

No nosso problema, há dois pontos possíveis para o encontro:  $C$  ou  $C'$ . Os ângulos calculados foram  $ABC = 84,8^\circ$  e  $ABC' = 95,2^\circ$ . (Figura 68).

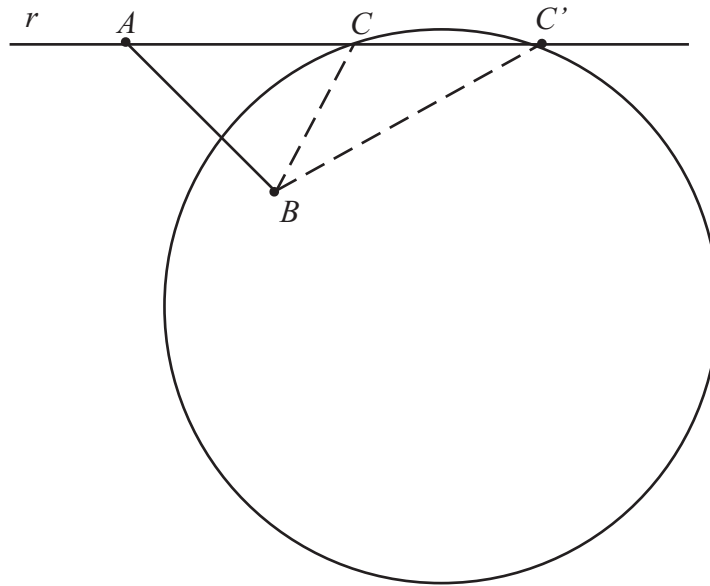


Figura 68

### Problemas suplementares

1. Se as velocidades forem iguais então os corredores percorrerão distâncias iguais. Se  $\alpha = BAC$  é agudo então  $C$  é a interseção da mediatriz de  $AB$  com  $r$ . Se  $\alpha$  é reto ou obtuso, não há solução.

2. No triângulo  $ABC$ , os lados  $AC$  e  $BC$  são respectivamente proporcionais a  $9$  e  $v$ . Daí, pela lei dos senos,

$$\frac{9}{\text{sen } \alpha} = \frac{v}{\text{sen } 50^\circ} \quad \text{donde} \quad \text{sen } \alpha = \frac{9 \cdot \text{sen } 50^\circ}{v} \leq 1.$$

Daí,  $v \geq 9 \cdot \text{sen } 50^\circ$ , ou seja,  $v \geq 6,89\text{m/s}$ . Note que a menor velocidade de  $B$  ocorre quando o ângulo  $ABX$  é reto.

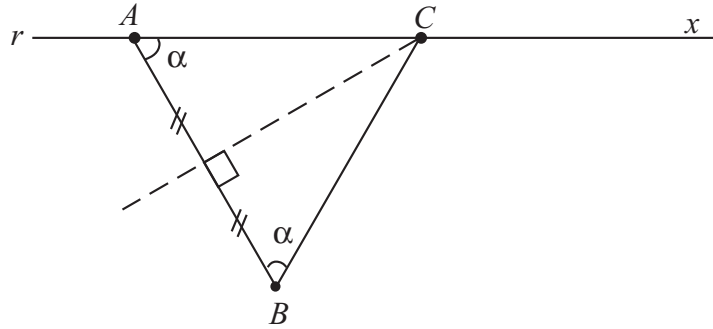


Figura 69

3. Veja a Figura 70. Pela lei dos cossenos,

$$PQ^2 = 1,2^2 + 1,8^2 - 2 \cdot 1,2 \cdot 1,8 \cdot \cos 27^\circ, \text{ donde } PQ = 911 \text{ m.}$$

Aplicando a lei dos senos,

$$\frac{1,8}{\text{sen } \alpha} = \frac{0,911}{\text{sen } 27^\circ} \Rightarrow \text{sen } \alpha = 0,897.$$

Temos então  $\alpha = 63,8^\circ$  e, conseqüentemente,  $\beta = 89,2^\circ$ .

4. Veja a Figura 71. Como os ângulos PAB e PBA foram medidos, encontramos  $\text{APB} = 31,6^\circ$ .

$$\frac{PA}{\text{sen } 77,9^\circ} = \frac{660}{\text{sen } 31,6^\circ} \Rightarrow PA = 1231,6$$

$$h = PA \cdot \text{tg}(\text{CAP}) = 1231,6 \cdot \text{tg } 29,7^\circ = 702,5 \text{ m.}$$

O leitor poderá calcular a mesma altura utilizando o triângulo PBC para verificar a exatidão das medidas.

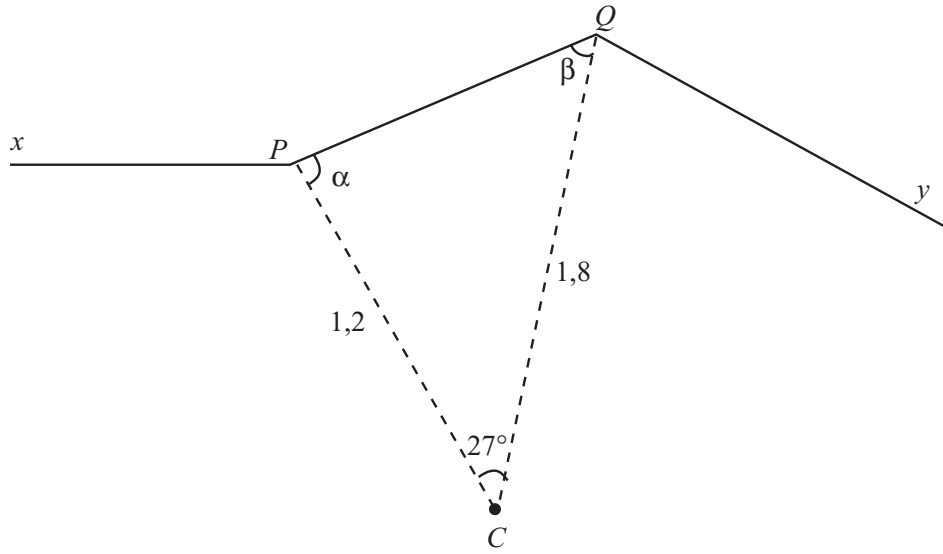


Figura 70

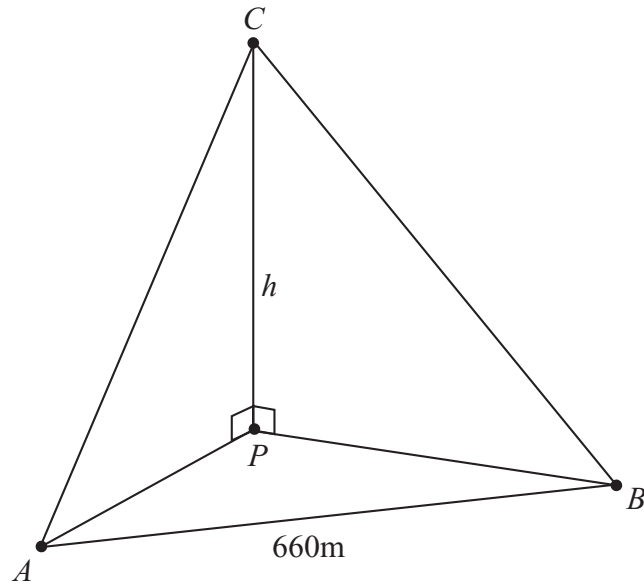


Figura 71