Capítulo 3

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Problema 1. Uma piscina tem capacidade para 100 m^3 de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado 1 kg de cloro na piscina. Água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado através de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam 900 g de cloro na piscina.

a) Que quantidade de cloro restará na piscina 10 horas após sua colocação?

b) E após meia hora da aplicação?

c) E após t horas?

Uma resposta muitas vezes dada para a primeira pergunta é que, após 10 horas, não há mais cloro na piscina. Esta resposta resulta da aplicação do modelo mais simples de variação de uma grandeza, expresso por uma função afim. Segundo este modelo, a variação sofrida em cada intervalo de 1 hora é sempre a mesma. Assim, se na primeira hora foram eliminados 100 g de cloro, o mesmo deveria ocorrer em cada uma das 10 horas seguintes, fazendo com que todo o cloro seja eliminado nestas 10 horas. O gráfico da Figura 17 ilustra este raciocínio.

A solução acima, entretanto, não está correta. Não é razoável admitir-se que a eliminação de cloro se dê a uma taxa constante. De fato, é muito mais razoável que esta taxa dependa da quantidade de cloro presente na piscina: quanto maior a quantidade de

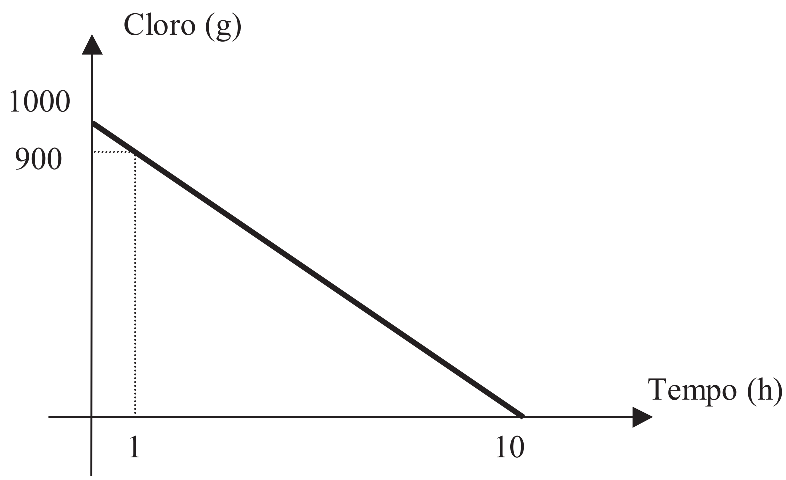


Figura 17

cloro, mais cloro é eliminado por unidade de tempo. Na verdade, parece intuitivo que a quantidade eliminada por unidade de tempo seja *proporcional* à quantidade existente de cloro. Para verificarmos esta conjetura, utilizaremos um recurso freqüentemente utilizado para analisar problemas envolvendo grandezas que variam continuamente: vamos *discretizar* o problema. Ao invés de considerar que a água ingressa na piscina e é dela eliminada de modo contínuo, vamos dividir o tempo em pequenos intervalos de comprimento Δt e imaginar que, em cada um destes intervalos, o processo ocorra da forma descrita a seguir. Primeiro, ingressa na piscina, cujo volume representaremos por V, uma quantidade de água pura igual a $v\Delta t$, onde v é a vazão (expressa, por exemplo, em m^3 por hora); esta água é adicionada à mistura existente de cloro e água. A seguir, um volume igual a $v\Delta t$ é retirado da mistura, restaurando o volume inicial (veja a Figura 18).

Vejamos o que ocorre com a quantidade $c(t)$ de cloro em cada um destes intervalos. No início do processo, esta massa está uniformemente distribuída em um volume V de líquido. Após o ingresso de água pura, a quantidade de cloro não se altera, mas passa a estar distribuída em um volume igual a $V + v\Delta t$. Deste volume, retira-se $v\Delta t$, retendo-se um volume igual a V. Como o

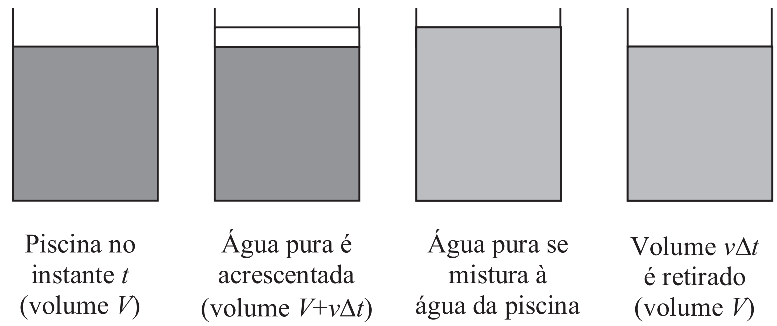


Figura 18

cloro está distribuído uniformemente, a quantidade de cloro que permanece na piscina é proporcional ao volume retido. Isto é, temos, o seguinte quadro:

	Volume de líquido	Quantidade de cloro
Antes da saída	$V + v\Delta t$	$c(t)$
Depois da saída	V	?

O valor desconhecido é, então, dado por $c(t+\Delta t) = c(t)\frac{V}{V+v\Delta t}$. O mais importante a observar é que a fração $\frac{V}{V+v\Delta t}$ é constante para cada intervalo de comprimento Δt. Assim, em cada um destes intervalos, a quantidade de cloro é multiplicada por um valor constante. Note que o mesmo ocorrerá em um intervalo maior, formado pela justaposição de n intervalos de comprimento Δt: a quantidade de cloro em um intervalo de tamanho $n\Delta t$ é multiplicada por $\left(\frac{V}{V+v\Delta t}\right)^n$. A variação da quantidade de cloro, por sua vez, é obtida da equação acima subtraindo-se a quantidade inicial $c(t)$ em cada lado, o que fornece

$$c(t+\Delta t) - c(t) = c(t)\left(\frac{V}{V+v\Delta t} - 1\right) = c(t)\left(-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}\right).$$

Uma outra forma de expressar o mesmo fato é dizer que a variação relativa $\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{c(t)}$ é constante e igual a $-\frac{v\Delta t}{V+v\Delta t}$. Isto confirma o comportamento que tínhamos intuído anteriormente: a variação da quantidade de cloro em intervalos de mesmo comprimento é proporcional à quantidade existente no início do intervalo.

Voltemos ao nosso problema. A análise acima mostra a inadequação da primeira tentativa de solução e aponta a solução correta. A perda de cloro, nos períodos consecutivos de 1 hora, não é a mesma. O que é constante, em cada um destes períodos, é a variação relativa: se 10% do cloro foi eliminado na primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Equivalentemente, se 90% do cloro permanece após a primeira hora, o mesmo ocorre em cada hora a seguir. Logo, após 10 horas da aplicação, a quantidade de cloro terá sido multiplicada por $(0{,}9)^{10} = 0{,}349$. Portanto, neste instante haverá 349 gramas de cloro na piscina. De modo geral, podemos expressar a quantidade de cloro ao final de n horas (onde n é natural) por:

$$c(n) = 1000 \cdot (0{,}9)^n, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

A Figura 19 ilustra este comportamento.

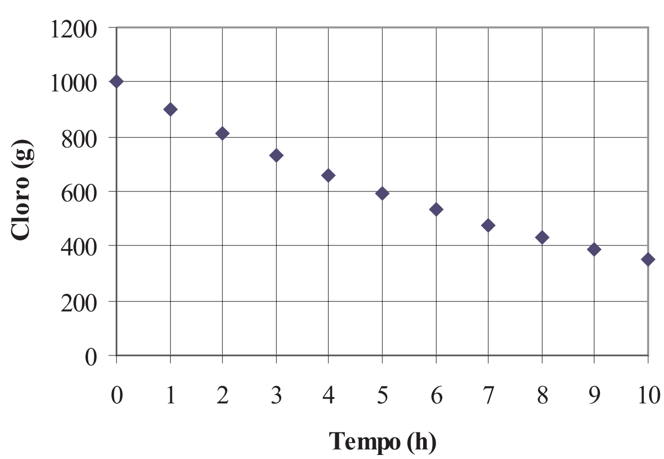


Figura 19

Observe que estas quantidades formam uma progressão geométrica. Na verdade, ao se considerar a quantidade de cloro em instantes igualmente espaçados, obtém-se sempre uma progressão geométrica, já que aquela quantidade é multiplicada pela mesma constante em cada intervalo. Podemos usar este fato para responder à segunda pergunta do problema, subdividindo o período de uma hora após a aplicação de cloro em dois períodos de meia hora cada. Em cada um destes períodos, a quantidade de cloro é multiplicada por uma constante k (Figura 20). Como ao final dos dois períodos de meia hora a quantidade de cloro é multiplicada por $0{,}9$, temos $k \cdot k = 0{,}9$ e, daí, $k = \sqrt{0{,}9} = 0{,}948$. Logo, a quantidade de cloro após 6 horas é igual a $1000 \times 0{,}948 = 948\,\mathrm{g}$. Note que, se tivéssemos usado o modelo afim da Figura 17, teríamos obtido $950\,\mathrm{g}$ para a quantidade de cloro neste instante.

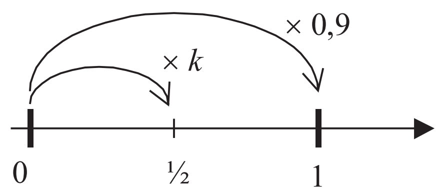


Figura 20

Podemos generalizar a solução acima e calcular a quantidade de cloro a intervalos constantes de meia hora. De fato, para um instante da forma $t = \frac{1}{2}n$, com n natural, temos $c(t) = c\left(\frac{1}{2}n\right) = c(0)k^n$, onde k é a constante calculada acima. Assim,

$$c(t) = c(\frac{1}{2}n) = 1000\left(\sqrt{0{,}9}\right)^n = 1000\,(0{,}9)^{n/2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Novamente, estes valores formam uma progressão geométrica, ilustrada na Figura 21. Esta progressão é obtida a partir da progressão da Figura 19 "interpolando um meio geométrico" entre cada par de termos consecutivos.

Observe que, substituindo $\frac{n}{2}$ por t, temos $c(t) = 1000 \cdot (0{,}9)^t$ para todo t da forma $\frac{n}{2}$. Na verdade, podemos mostrar que a expressão acima vale para todo t racional, aplicando o mesmo processo acima. De fato, seja $t = p/q$. Como este intervalo é formado

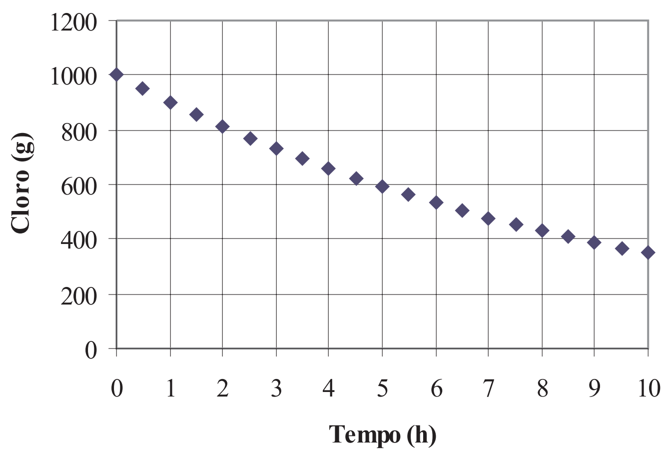


Figura 21

pela justaposição de p intervalos de comprimento $1/q$, a quantidade de cloro restante neste instante é dada por $c(p/q) = c(0)k^p$, onde k é a constante pela qual a quantidade de cloro é multiplicada em intervalos de tempo de comprimento $1/q$. Mas q destes intervalos formam um intervalo de comprimento 1, em que $c(t)$ é multiplicado por $0{,}9$. Assim, $k^q = 0{,}9$ e $k = 0{,}9^{1/q}$ (veja a Figura 22).

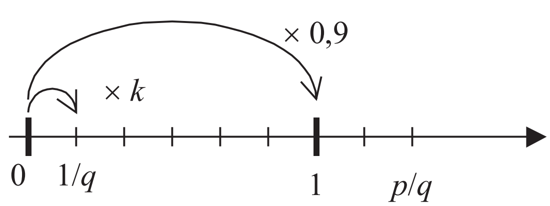


Figura 22

Substituindo na equação acima, obtemos

$$c(t) = c(p/q) = c(0).\left(0{,}9^{1/p}\right)^p = 1000 \cdot 0{,}9^{p/q} = 1000 \cdot 0{,}9^t.$$

E para valores irracionais de t? A resposta é que todo t irracional pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por uma valores racionais. Os valores correspondentes de c fornecem, por sua vez, aproximações para $c(t)$. Este é exatamente o mecanismo através do qual se define uma função exponencial, como veremos mais adiante. Assim, a função que fornece a quantidade de cloro que resta no instante t é dada por $c(t) = 1000 \cdot 0{,}9^t$, para todo t real. O gráfico desta função é dado na Figura 23.

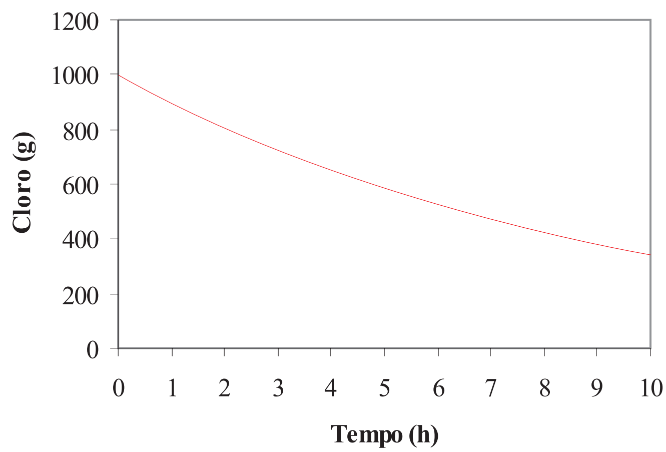


Figura 23

O exemplo acima ilustra um modelo matemático de variação que é tão importante quanto o modelo dado por uma função afim. As situações em que ele se aplica são aquelas em que, ao invés da variação absoluta $f(x+h) - f(x)$ não depender de x (depender, portanto, apenas de h), quem tem esta propriedade é a variação relativa $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$. Funções crescentes (ou decrescentes) com esta propriedade são necessariamente da forma $f(x) = ba^x$. Os valores de a e b, a exemplo do que ocorre nas funções afins, pode ser facilmente interpretado em termos dos valores de f nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Temos $f(0) = b \cdot a^0 = b$. Logo, b corresponde ao *valor inicial* $f(0)$. Já no ponto $x = 1$, temos $f(1) = b \cdot a^1 = f(0)a$. Portanto, $a = f(1)/f(0)$ e corresponde à constante pela qual f é multiplicada em todo intervalo de comprimento 1.

Em resumo, temos o teorema abaixo, discutido em mais detalhes em “A Matemática do Ensino Médio”, vol. 1.

Teorema. *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para cada* x *e* h, *a variação relativa* $[f(x+h)-f(x)]/f(x)$ *(ou, equivalentemente, a razão* $f(x+h)/f(x)$*) depende apenas de* h *e não de* x. *Então, se* $b = f(0)$ *e* $a = f(1)/f(0)$, *tem-se* $f(x) = ba^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que sua meia-vida era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra, foi a um dicionário e encontrou a seguinte definição:

> *Meia-vida:* tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

a) Após 12 horas da ingestão do remédio, qual é a quantidade do remédio ainda presente no organismo?

b) E após 3 horas da ingestão do remédio?

c) E após t horas de sua ingestão?

Para respondermos à primeira pergunta, basta aplicar a definição de meia-vida. Na verdade, esta definição dá uma importante informação a respeito do fenômeno a que se refere: em qualquer período de 6 horas, a quantidade da droga presente no organismo se reduz à metade do seu valor no início deste período. Deste modo, após as primeiras 6 horas, haverá $\frac{1}{2} \times 60 = 30$ mg. Em mais 6 horas, este valor se reduz novamente à metade, passando a ser igual a $\frac{1}{2} \times 30 = 15$ mg.

Note que, como no problema anterior, não é apropriado utilizar-se uma função afim para modelar a variação da medicação. Tal modelo conduziria à conclusão equivocada de que, ao final das 12 horas, não haveria mais droga presente no organismo (por este raciocínio, a quantidade de droga eliminada no segundo período de seis horas seria igual à quantidade eliminada no primeiro, levando à eliminação total em 12 horas). Mas por que este modelo é inadequado para esta situação? Na verdade, o processo de eliminação de uma droga do organismo é análogo ao processo de eliminação do cloro na piscina do problema anterior. Pode-se pensar na corrente sangüínea como sendo a piscina, na qual a droga está presente. À medida que mais água é ingerida, ela é adicionada à corrente sangüínea, sendo o excesso de líquido eliminado através dos órgãos excretores. Como no caso da piscina, a quantidade de droga eliminada é maior quando a quantidade de droga presente é maior. Assim, é razoável adotar-se, para a quantidade de droga no organismo, um modelo segundo o qual a variação relativa em intervalos de tempo de mesma duração é sempre a mesma, o que nos leva a um modelo expresso por uma função da forma $f(x) = ba^x$.

Para calcular a quantidade de droga no instante $t = 3$, basta observar, mais uma vez, que em cada intervalo de duração 3 horas, a quantidade de droga é multiplicada por uma constante k. Como em 6 horas a droga se reduz à metade, temos $k \cdot k = \frac{1}{2}$ e, portanto, $k = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$. Logo, após 3 horas da ingestão, a massa restante de droga é igual a $60 \times 0{,}707 = 42\,\mathrm{g}$, aproximadamente (compare com o valor que obteríamos com o modelo afim, que seria igual a 45 g).

Para obter a quantidade de droga em um instante qualquer t, utilizaremos os valores $f(0) = 60$ e $f(6) = 30$ para calcular os coeficientes a e b de $f(x) = ba^x$. A primeira igualdade fornece $b = 60$ e a segunda dá $60a^6 = 30$, de onde obtemos $a = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{6}}$. Logo, a quantidade de droga após t horas da ingestão é dada por

$$f(t) = 60\left(2^{-\frac{1}{6}}\right)^t = 60 \cdot 2^{-\frac{t}{6}}.$$

Problema 3. Um banco afirma que empresta dinheiro a juros de 100% ao ano. Na hora de pagar a sua dívida, um ano depois, um cliente observa que os juros cobrados são mais altos. Ele procura o gerente do banco que explica que, na verdade, os juros são capitalizados mensalmente, à taxa de $\frac{1}{12} \times 100\% = 8{,}333\%$ ao mês.

a) Qual é a taxa anual efetivamente cobrada pelo banco?

b) E se o banco resolve considerar que os juros são capitalizados a cada dia?

c) E se o banco considerar que os juros são capitalizados continuamente?

Problemas de capitalização monetária são modelados por funções do tipo exponencial, já que o valor é multiplicado, em cada período, pelo fator $(1 + i)$, onde i é a taxa de juros correspondente ao período. Na prática, porém, o processo de capitalização é discreto (como descrito nas duas primeiras perguntas). No primeiro caso, o intervalo de 1 ano é dividido em 12 intervalos com um mês de duração. Em cada um desses intervalos, a dívida é multiplicada por $(1 + 1/12)$. Logo, ao fim dos 12 meses, a dívida é multiplicada por $(1 + 1/12)^12 = 2{,}613$. Assim, a taxa anual de juros é igual a 161,3% (e não 100%).

No segundo caso, o período de um ano é subdividido em 365 períodos de 1 dia. Em cada período, a dívida é multiplicada por $(1+1/365)$ e, ao fim do ano, terá sido multiplicada por $(1+1/365)^{365}$ $= 2{,}714$. Assim, segundo este esquema de capitalização, a taxa anual será igual a 171,4%.

Finalmente, admitir que os juros são capitalizados continuamente corresponde a tomar o valor limite dos processos descritos acima. Se dividirmos o período de 1 ano em n períodos e capitalizarmos a quantia em cada um deles a juros de $\frac{1}{n}$, o o capital inicial será multiplicado por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. A resposta à terceira pergunte é obtida tomando o limite quando $n \to +\infty$ desta expressão. O valor deste limite é denotado pela letra e e é um número fundamental na Matemática. Seu valor é aproximadamente igual a 2,718, o que leva a uma taxa anual de 171,8% em nosso problema. Alguns dos usos do número e serão discutidos mais adiante.

Problema 4. Voltando ao Problema 1, quanto tempo deve transcorrer para que a quantidade de cloro na piscina se reduza à metade?

Como vimos, a quantidade de cloro no instante t é dada por $c(t) = 1000 \times 0{,}9^t$. Logo, o instante t em que esta quantidade se reduz à metade satisfaz a equação $500 = 1000 \times 0{,}9^t$, ou seja, $0{,}9^t = 0{,}5$. Como resolver esta equação? Existe um tal valor de t?

Para responder a estas perguntas, precisamos olhar com mais cuidado as propriedades das funções exponenciais (para maiores detalhes veja "A Matemática do Ensino Médio", vol. 1). Lembramos que uma função exponencial de base a (onde $a > 0$ e $a \neq 1$) é uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Mas será que a fórmula a^x tem sentido para todo número real?

Certamente, a^x está bem definido quando x é natural: a^n é definido como o produto $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a$ (com n fatores). Mais precisamente, o valor de a^n é definido recursivamente: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$, para todo n natural. A partir desta definição, podem ser demonstradas as propriedades fundamentais das potências de expoente natural: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ e $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, para quaisquer naturais m e n; além disso, se $m < n$, então $a^m < a^n$ quando $a > 1$ e $a^m > a^n$ quando $0 < a < 1$.

As definições das potências de expoente real de a são feitas de modo que estas propriedades sejam válidas para quaisquer expoentes. Assim, a^0 é definido como sendo 1, de modo que a identidade $a^{0+n} = a^0\, a^n$ seja válida para todo n natural. A seguir, a^{-n}, para n natural, é definido como $\frac{1}{a^n}$, para que a identidade $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$ se cumpra para todo n.

Um pouco mais delicada é a definição das potências de expoente racional. Basta, porém, proceder como fizemos ao resolver o Problema 1. Inicialmente, dado um natural q, desejamos definir $a^{1/q}$ de modo que $\left(a^{1/q}\right)^q = a^1 = a$. Portanto, $a^{1/q}$ deve ser raiz da equação $x^q = a$. Mas, para todo q natural, a função $g\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ tal que $g(x) = x^q$ é contínua, estritamente crescente e ilimitada (veja a Figura 24). Em conseqüência, para todo a positivo, existe exatamente um número real positivo x tal que $a^q = 1$, que é denotado por $a^{1/q}$ ou $\sqrt[q]{a}$.

Agora, podemos definir a^x para todo x racional: se $x = p/q$, definimos

$$a^x = a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p.$$

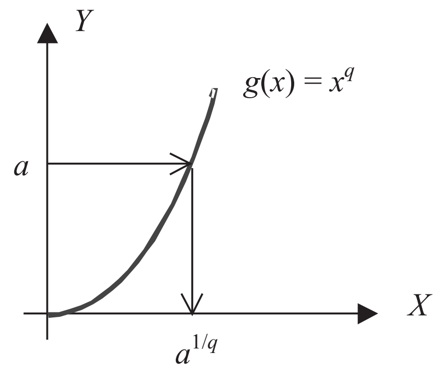


Figura 24

As potências de expoente racional assim definidas preservam as propriedades fundamentais das potências de expoente natural: $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$ e, se $x < y$, então $a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Consideremos, finalmente, potências de expoente irracional. Por exemplo, qual é o significado de $a^{\sqrt{2}}$? A idéia básica é que todo número irracional pode ser aproximado, com precisão arbitrária, por números racionais. Por exemplo, as melhores aproximações por falta, de $\sqrt{2}$ com 1, 2 e 3 casas decimais são 1,4, 1,41 e 1,414. Os valores de a^x para tais aproximações conduzem, por sua vez, a aproximações cada vez melhores para $a^{\sqrt{2}}$. Devido à monotonicidade das potências de expoente racional, estas aproximações serão por falta (quando $a > 1$) ou por excesso (quando $0 < a < 1$). Em qualquer caso, o valor limite destas aproximações (definido como o menor número real maior que ou igual a todas estas aproximações, no caso $a > 1$, ou o maior número real menor que ou igual a elas, no caso $0 < a < 1$) é tomado como definição de $a^{\sqrt{2}}$ (veja “A Matemática do Ensino Médio”, vol. 1, para maiores detalhes).

Assim, definimos os valores de a^x para todos os valores reais de x, com o resultado sendo sempre um número positivo. Com isso, construímos uma função $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ tal que $f(x) = a^x$, chamada de função exponencial de base a, que tem as seguintes propriedades:

a) $f(x+y) = f(x)f(y)$ para quaisquer reais x e y;

b) f é crescente (isto é, $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$) quando $a > 1$ e é decrescente ($x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$) quando $a < 1$; em conseqüência, f é sempre injetiva, ou seja, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;

c) f é contínua;

d) se $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

e) f é sobrejetiva (isto é, para todo $y > 0$ existe x tal que $a^x = y$).

A Figura 25 mostra o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

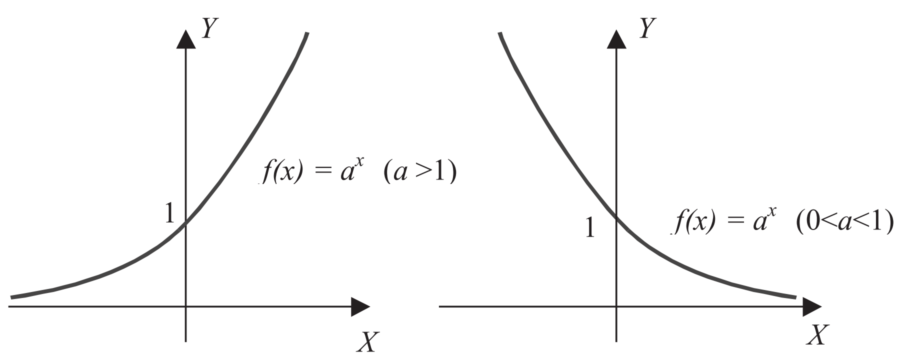


Figura 25

Podemos voltar agora à pergunta que abriu esta discussão ("existe um valor real de x para o qual $0{,}9^x = 0{,}5$?") e respondê-la afirmativamente. Como as funções exponenciais (em particular, a de base 0,9) são injetivas e têm por imagem o conjunto dos reais positivos, existe exatamente um número real x tal que $0{,}9^x = 0{,}5$ (veja a Figura 26).

De modo geral, dado um número $y > 0$, o único real x tal que $a^x = y$ (onde $y > 0$) é chamado de logaritmo de y na base a e representado por $\log_a y$. A função logarítmica de base a, que associa

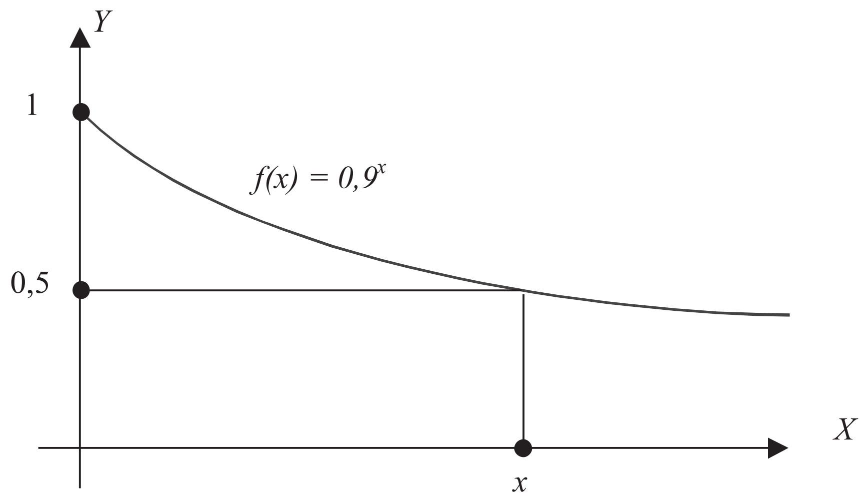


Figura 26

a cada número real positivo o seu logaritmo na base a, é, portanto, a *inversa* da função exponencial de base a e suas propriedades decorrem das propriedades da exponencial.

Assim, a função $\log_a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades (veja os gráficos da Figura 27):

a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, para quaisquer $x, y > 0$.

b) $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$, para qualquer r e qualquer $x > 0$.

c) $\log_a(a^x) = x$, para todo x, e $a^{\log_a x} = x$, para todo $x > 0$.

d) $\log_a$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

e) se $a > 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$;

se $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$.

f) $\log_a$ é sobrejetiva.

Assim, para resolver o Problema 4 devemos obter $\log_{0,9} 0{,}5$. Como obter este valor? Há algumas décadas, a resposta seria consultar uma tabela de logaritmos, que eram usadas não só para

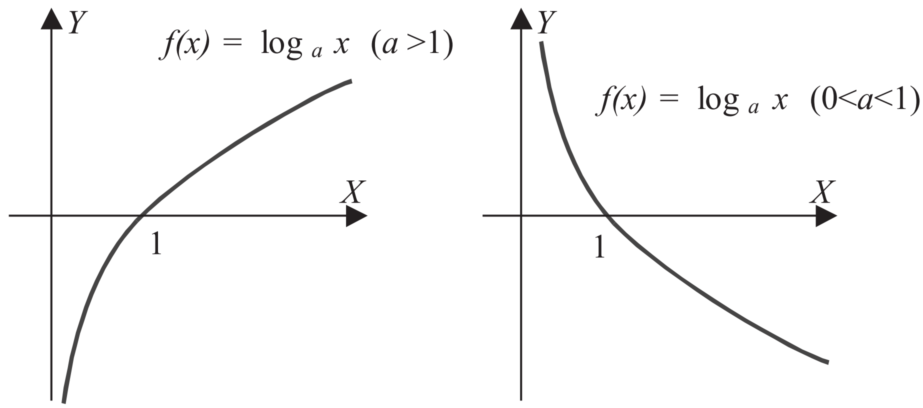


Figura 27

obter a resposta a problemas como estes, mas também para facilitar cálculos, explorando o fato de que logaritmos transformam produtos em somas. Hoje em dia, é mais provável que a resposta seja obtida com uma calculadora científica. Em ambos os casos, o usuário de primeira viagem depara-se com uma dificuldade: não há tabelas de logaritmos na base 0,9, nem teclas na calculadora para calcular tais logaritmos. As bases em que valores de logaritmos estão usualmente tabeladas ou disponíveis em calculadoras são as bases 10 e e (a base dos logaritmos naturais ou neperianos). Mas, na verdade, qualquer base de logaritmos pode ser usada para calcular um logaritmo em qualquer outra base.

De fato, como vimos, $\log_{0,9} 0{,}5$ é a solução da equação $0{,}9^x = 0{,}5$. Aplicando as propriedades dos logaritmos em uma base qualquer a, temos, sucessivamente

$$\begin{aligned} \log_a 0{,}9^x &= \log_a 0{,}5 \\ x \log_a 0{,}9 &= \log_a 0{,}5 \\ x &= \log_a 0{,}5/\log_a 0{,}9 \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$\log_{0,9} 0{,}5 = \log_a 0{,}5/\log_a 0{,}9.$$

Se usamos logaritmos na base 10, obtemos

$$x = -0{,}30103/0{,}04576 = 6{,}57881.$$

Se preferimos logaritmos na base e, resulta

$$x = -0{,}69315\,/-0{,}10356 = 6{,}57881.$$

A resposta, naturalmente, é a mesma: são necessárias 6,57881 horas (aproximadamente 6 horas e 35 minutos) para que a quantidade de cloro se reduza à metade.

Problema 5. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco, que a remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobra?

Após n meses, a quantia depositada terá sido multiplicada por $(1 + 0.01)^n = 1{,}01^n$. Para que a quantia dobre, devemos ter $1{,}01^n = 2$. Tomando logaritmos em uma base qualquer (por exemplo, na base 10), temos

$$n \log 1{,}01 = \log 2.$$

Com auxílio de uma tabela ou de uma calculadora, obtemos $\log 1{,}01 = 0{,}00432$ e $\log 2 = 0{,}30103$ e daí

$$n = 0{,}30103/0{,}00432 = 69{,}68.$$

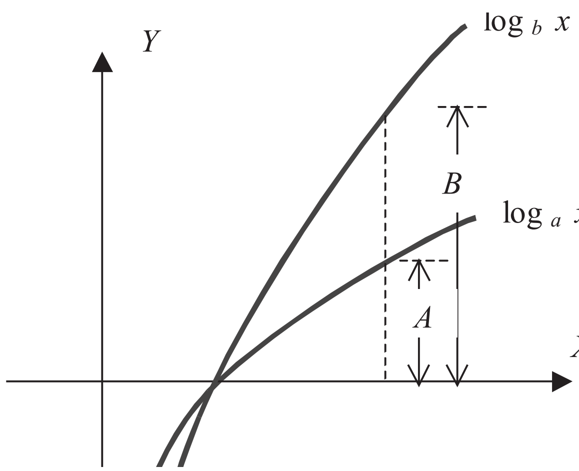
Assim, seria necessário esperar 70 meses para que a quantia dobre.

No final da resolução do Problema 4, concluímos que $\log_{0,9} 0{,}5 = \log_a 0{,}5/\log_a 0{,}9$, onde a é qualquer real positivo e diferente de 1. De modo geral

$$\log_b x = \log_a x/\log_a b,$$

para quaisquer números positivos a, b, c (com $a \neq 1$ e $b \neq 1$).

Esta última identidade é bem conhecida como a “fórmula de mudança de base” dos logaritmos. O que não é muito destacado é que ela mostra que duas funções logarítmicas quaisquer são



$$\frac{B}{A} = \log_b a$$

Figura 28

sempre múltiplas uma da outra. De fato, a fórmula nos diz que $\log_b x = k \log_a x$, onde a constante k é igual a $1/\log_a b$. A Figura 28 ilustra este fato.

Uma conseqüência da discussão acima é que as funções exponenciais também estão todas relacionadas entre si. De fato, se a e b são números positivos e diferentes de 1, temos

$$a^x = b^{\log_b a^x} = b^{(\log_b a)x}.$$

Logo, existe uma constante $k = \log_b a$ tal que

$$a^x = b^{kx}.$$

Portanto, a exemplo do que ocorre com os logaritmos, quando trabalhamos com funções exponenciais podemos sempre expressá-las usando nossas bases favoritas. Na maior parte dos casos, preferimos trabalhar com a base e, pelas razões explicadas a seguir. Assim, ao invé s de caracterizarmos as funções do tipo exponencial como sendo aquelas da forma $f(x) = ba^x$, poderíamos, equivalentemente, caracterizá-las como sendo da forma $f(x) = be^{kx}$.

A preferência pela base e se deve ao fato de que o coeficiente k na expressão be^{kx} tem uma importante interpretação. Como vimos, funções do tipo exponencial têm a propriedade fundamental de que sua variação relativa em intervalos de comprimento constante é constante. Em particular, sua taxa de variação instantânea (que é o valor da derivada da função no instante considerado) é proporcional ao seu valor naquele instante. Mas a função derivada de $f(x) = be^{kx}$ é $f'(x) = bke^{kx} = kf'(x)$. Portanto, $k = \frac{f'(x)}{f(x)}$ para todo x. Ou seja, k é a razão constante entre o valor da taxa de variação instantânea de uma função do tipo exponencial e o seu valor no ponto considerado.

Problema 6. No Problema 1, vimos que a quantidade de cloro na piscina após t horas é dada por $c(t) = 1000 \times 0{,}9^t$.

a) Escreva esta função na forma $c(t) = be^{kt}$.

b) Qual é a taxa instantânea de escoamento de cloro no instante inicial?

Repetindo o processo acima, temos

$$0{,}9^t = e^{\log_e 0{,}9^t} = e^{t \log_e 0{,}9} = e^{-0{,}10536t}.$$

Logo,

$$c(t) = 1000 \cdot e^{-0{,}10536t}.$$

A taxa de variação de cloro no instante inicial é obtida multiplicando a quantidade então existente (1000) multiplicada pela constante k $(-0{,}10536)$. Logo, o cloro está se escoando à taxa instantânea de 105 g por hora. Note que isto não significa que 105 g de cloro serão eliminadas na primeira hora, pois a taxa instantânea não é constante.

Problemas Propostos*

1. Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.

a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

b) E em um período de t anos?

2. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?

3. A lei do resfriamento de Newton estabelece que, quando um corpo é colocado em um ambiente mantido à temperatura constante, sua temperatura varia de modo a ser a mesma do ambiente, a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Uma peça de metal a 120° é colocada sobre a bancada do laboratório, mantido à temperatura constante de 20°. Dez minutos depois, verificou-se que a temperatura da peça tinha se reduzido para 80°.

a) Qual será a temperatura da peça uma hora depois de ter sido colocada na bancada?

b) Esboce o gráfico que exprime a temperatura da peça ao longo do tempo.

4. A meia vida do isótopo radioativo do carbono (C^{14}) é de 5500 anos. Que percentual da massa original de C^{14} restará em uma amostra após 10000 anos?

---

*Soluções na página 148.

5. Qual é a meia vida de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

6. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $34{,}8°$. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou $34{,}1°$. A temperatura do quarto era mantida constante a $20°$. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36{,}5°$.

7. A água de um reservatório se evapora à taxa de 10% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início?

8. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era $0{,}145$ vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.

9. Foram injetadas 20 mg de uma certa droga em um paciente. A taxa instantânea de eliminação da droga, imediatamente após a injeção, é de 5 mg por hora. Qual é a meia-vida da droga? (Cuidado! A resposta *não* é 2 horas.)

10. O gráfico da função da Figura 29 foi desenhado utilizando-se uma escala logarítmica para o eixo Y (ou seja, as ordenadas no gráfico representam o logaritmo decimal dos valores da função).

a) Mostre que o gráfico de uma função f neste tipo de representação é uma reta se e somente se ela é do tipo exponencial ($f(x) = ba^x$).

b) Qual é a função representada pelo gráfico da figura?

11. No problema da piscina (Problema 1), verifique que a taxa instantânea de variação da quantidade de cloro no instante t é igual a $-c(t) \cdot \frac{v}{V}$. Utilizando este fato e o resultado do Problema 6, determine com que vazão a água pura ingressa na piscina.

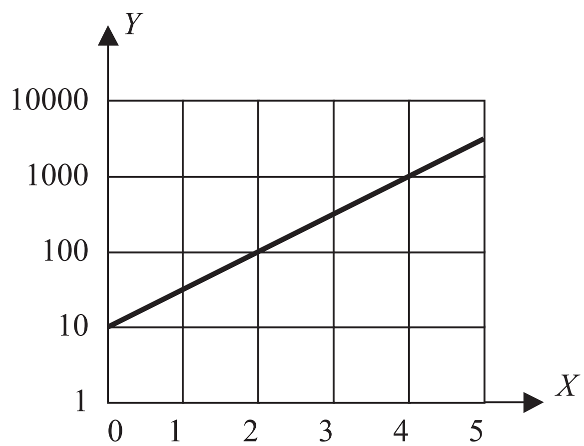


Figura 29