

### Soluções dos Problemas do Capítulo 3

**1.** A cada período de 5 anos, a população da cidade é multiplicada por 1,02. Logo, em 20 anos, ela é multiplicada por  $1,02^4 = 1,0824$ . Assim, o crescimento estimado é de 0,0824, ou seja, 8,24%.

Está implícito no enunciado do problema, que a população é multiplicada por uma constante em qualquer intervalo de tempo de duração fixa (não necessariamente com a duração de 5 anos). Este é um modelo adequado para crescimento populacional, pois traduz o fato de que o aumento da população, em um certo intervalo de tempo, é proporcional à população no início deste intervalo.

Em conseqüência, a população  $p(t)$  no instante  $t$  é expressa por uma função do tipo exponencial  $p(t) = ba^t$ , onde  $b = p(0)$  é a população no instante inicial. O valor de  $a$  pode ser calculado usando o fato de que, em 5 anos, há um crescimento de 2%. Temos  $p(5) = p(0) \times a^5 = p(0) \times 1,02$ . Portanto,  $a = 1,02^{\frac{1}{5}}$  e  $p(t) = p(0) \times 1,02^{\frac{t}{5}}$ . Logo, o crescimento relativo em um período de duração  $t$  anos é

$$\frac{p(t) - p(0)}{p(0)} = \frac{p(0) \times 1,02^{\frac{t}{5}} - p(0)}{p(0)} = 1,02^{\frac{t}{5}} - 1.$$

**2.** O número de bactérias no instante  $t$  é da forma  $f(t) = ba^t$ . Como  $f(0) = 1000$ , temos  $b = 1000$ . Como  $f(1) = 1500$ , temos  $1500 = 1000 \cdot a^1$  e, daí,  $a = \frac{1500}{1000} = \frac{3}{2}$ . Logo,  $f(t) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$ . Assim, 5 horas após o início do experimento, o número de bactérias será

$$f(5) = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 \approx 7594 \text{ bactérias.}$$

**3.** A lei do resfriamento estabelece que a diferença  $T - 20$  entre as temperaturas da peça e do ambiente varia, ao longo do tempo, com uma taxa de variação que é proporcional ao seu valor. Isto significa que  $T - 20$  é dada por uma função do tipo exponencial do tempo. Ou seja,  $T - 20 = ba^t$  ou, equivalentemente,

$T = 20 + ba^t$ . Para calcular  $a$  e  $b$ , usamos as temperaturas observadas nos instantes  $t = 0$  e  $t = 10$  (estamos escolhendo medir o tempo em minutos). Temos

$$20 + ba^0 = 120, \text{ de onde obtemos } b = 100 \text{ e}$$

$$20 + 100a^{10} = 80, \text{ de onde obtemos } a^{10} = \frac{60}{100} = 0,6 \text{ e, daí, } a = 0,6^{\frac{1}{10}}.$$

Ou seja, a temperatura  $T$  ao longo do tempo é dada por  $T = 20 + 100 \cdot 0,6^{\frac{t}{10}}$ . Após 1 hora (ou seja, para  $t = 60$  minutos), a temperatura será

$$T(60) = 20 + 100 \times 0,6^{\frac{60}{10}} = 20 + 100 \times 0,6^6 \approx 24,7.$$

O gráfico da temperatura ao longo do tempo está na Figura 55.

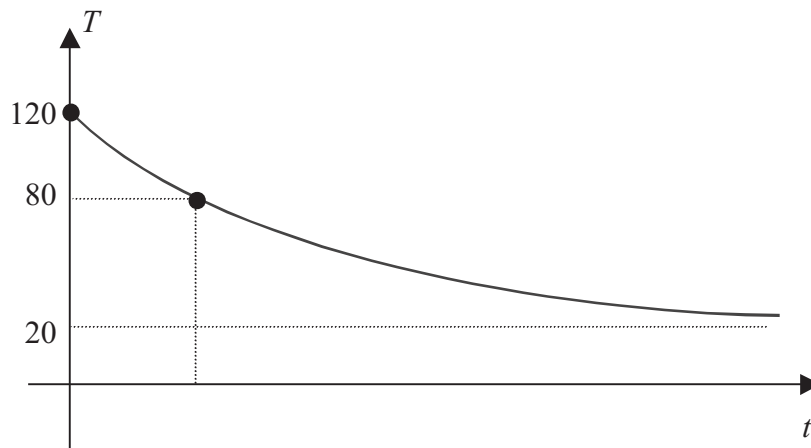


Figura 55

**4.** A massa de matéria radioativa é dada por  $m(t) = m_0 \cdot a^t$ , onde  $m_0$  é a massa no instante inicial. Como a meia-vida é 5500 anos, temos  $m(5500) = m_0 \cdot a^{5500} = m_0 \cdot \frac{1}{2}$ . Logo,  $a^{5500} = \frac{1}{2}$  e, portanto,  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5500}}$ . Assim, a massa de material radioativo que resta após 10000 anos é

$$m(10000) = m_0 \cdot a^{10000} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10000}{5500}} = m_0 \cdot 0,284.$$

## 150 Temas e Problemas

Logo, restam 28,4% do material radioativo original.

5. A massa no instante  $t$  é  $m(t) = m_0 \cdot a^t$ . Como  $m(1) = 0,8m_0$ , temos  $m_0 \cdot a^1 = 0,8m_0$  e, portanto,  $a = 0,8$ . A meia-vida é o tempo em que a massa se reduz à metade. É obtida, portanto, resolvendo a equação  $m_0 \cdot 0,8^t = m_0 \cdot \frac{1}{2}$ , ou seja,  $0,8^t = 0,5$ . Assim,  $t \log 0,8 = \log 0,5$  e, daí,  $t = \frac{\log 0,5}{\log 0,8}$ . Usando, por exemplo, logaritmos na base 10, tem-se

$$t = \frac{-0,30103}{-0,09691} = 3,10628 \text{ anos.}$$

6. Segundo a lei de resfriamento, a diferença  $T - 20$  entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente é dada por uma função do tipo exponencial. Assim,  $T - 20 = b \cdot a^t$ , ou seja,  $T = 20 + b \cdot a^t$ .

Adotando  $t = 0$  como o instante em que a temperatura do corpo foi tomada pela primeira vez e medindo o tempo em horas, temos  $T(0) = 34,8$  e  $T(1) = 34,1$ .

Assim, temos  $20 + b \cdot a^0 = 34,8$ , o que nos fornece  $b = 14,8$ . Em seguida,  $20 + 14,8 \cdot a^1 = 34,1$ , de onde tiramos  $a = \frac{14,1}{14,8}$ . Portanto, temos  $T = 20 + 14,8 \cdot \left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$ .

Para encontrar o instante da morte, devemos determinar  $t$  de modo que  $T = 36,5$ . Ou seja, devemos resolver  $36,5 = 20 + 14,8 \left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t$ . Temos

$$\begin{aligned} 16,5 &= 14,8 \times \left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t \\ \frac{16,5}{14,8} &= \left(\frac{14,1}{14,8}\right)^t \\ \log 16,5 &= t \log \frac{14,1}{14,8} \end{aligned}$$

Empregando logaritmos na base  $e$ , temos  $0,10873 = -0,04845t$ , de onde obtemos  $t = -2,24$ .

O sinal negativo indica que o instante em que a temperatura do corpo era de  $36,5^\circ$  é anterior ao momento da primeira medição.

Assim, a morte ocorreu aproximadamente 2,24 horas, ou seja, 2 horas e 14 minutos antes das 23:30. Isto é, o horário estimado para a morte é 21:16.

7. É necessário, antes de mais nada, interpretar corretamente as informações fornecidas. A taxa de 10% ao mês não implica em que, ao longo de um mês, 10% da água se evapore. O valor dado se refere à taxa instantânea de evaporação. Ou seja, se a água continuasse a se evaporar a uma taxa constante e igual à do instante inicial, 10% da água se evaporaria em um mês. No entanto, a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água existente e é, portanto, decrescente ao longo do tempo.

Como a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água no reservatório, esta é dada por uma função do tipo exponencial. É conveniente expressar esta função na forma  $q(t) = q_0 \cdot e^{kt}$ , onde  $q_0$  é a quantidade inicial de água no reservatório e  $k$  é a constante de proporcionalidade entre a taxa de evaporação e a quantidade de água. O dado do problema é que esta constante de proporcionalidade (logo o valor de  $k$ ) é igual a  $10\% = 0,1$  (com o tempo medido em meses). A lei de variação da quantidade de água é, assim,  $q(t) = q_0 \cdot e^{-0,1t}$ .

Para achar o tempo necessário para que a água se reduza à  $1/3$  de sua quantidade inicial, devemos resolver a equação

$$q_0 \cdot e^{-0,1t} = q_0 \cdot \frac{1}{3}.$$

Temos  $-0,1t = \log_e \frac{1}{3} = -1,09861$ . Logo,  $t = 10,9861$ , o que indica que a quantidade de água se reduz a  $1/3$  de seu valor em aproximadamente 11 meses.

8. No problema 4, estabelecemos que a massa de  $C^{14}$  ao longo do tempo é dada por  $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}}$ . Se a radioatividade da amostra hoje é 0,45 da observada em uma amostra viva do mesmo material, temos que o tempo  $t$  decorrido entre a época em que o material estava vivo e os dias de hoje satisfaz

$$m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}} = m_0 \cdot 0,45.$$

## 152 Temas e Problemas

Logo,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5500}} = 0,145$ , ou seja,  $\frac{t}{5500} \log \frac{1}{2} = \log 0,145$ .  
Utilizando logaritmos na base  $e$ :

$$\frac{t}{5500} \cdot (-0,69315) = -1,93102$$

Portanto,  $t \approx 15322$ . Logo, as pinturas foram feitas aproximadamente 15000 anos atrás.

**9.** A lei de variação da quantidade de droga pode ser expressa na forma  $q(t) = q_0 \cdot e^{-kt}$ , onde  $q_0$  é a quantidade inicial da droga (20 mg) e  $k$  é a razão entre a taxa de eliminação e a quantidade de droga. Neste caso,

$$k = \frac{5 \text{ mg/hora}}{20 \text{ mg}} = 0,25 \text{ hora}$$

(note a unidade apropriada para  $k$ ). Assim  $q(t) = 20 \cdot e^{-0,25t}$ .

Para calcular a meia-vida  $t$ , resolvemos a equação

$$20 \cdot e^{-0,25t} = 20 \cdot \frac{1}{2}$$

Temos:

$$e^{-0,25t} = 0,5$$

$$-0,25t = \log_e 0,5$$

$$t = \frac{\log_e 0,5}{\log_e 0,25} = 2,772 \approx 2 \text{ horas e } 46 \text{ minutos.}$$

**10.** Empregar uma escala logarítmica para o eixo  $Y$  equivale a representar, para cada valor de  $x$ , o par  $(x, \log_{10} f(x))$  no plano cartesiano. Logo, o gráfico será uma reta se e somente se os pontos  $(x, \log_{10} f(x))$  estão sobre uma reta. Isto ocorre se e só se existem constantes  $a$  e  $b$  tais que  $\log_{10} f(x) = ax + b$ , ou seja,

$$f(x) = 10^{ax+b} = 10^b \cdot (10^a)^x = B \cdot A^x,$$

onde  $B = 10^b$  e  $A = 10^a$ .

Na parte b), temos  $\log_{10} y = ax + b$ , onde os valores de  $a$  e  $b$  podem ser encontrados com o auxílio de dois pontos do gráfico. Para  $x = 0$ , temos  $y = 10$  e, para  $x = 4$ , temos  $y = 1000$ . Logo

$$\begin{aligned}\log_{10} 10 &= 1 = a \cdot 0 + b \\ \log_{10} 1000 &= 3 = a \cdot 4 + b\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos  $b = 1$  e  $a = \frac{1}{2}$ . Logo,  $\log_{10} y = \frac{1}{2}x + 1$ , ou seja,  $y = 10^{\frac{1}{2}x+1} = 10 \cdot (\sqrt{10})^x$ .

**11.** Na solução do problema 1, vimos que, ao discretizar o fenômeno segundo intervalos de duração  $\Delta t$ , obtemos:

$$c(t + \Delta t) - c(t) = c(t) \cdot \frac{-v\Delta t}{V + v\Delta t}.$$

Logo,

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} = -c(t) \cdot \frac{v}{V + v\Delta t}.$$

Portanto, a taxa instantânea de variação obtida tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  da expressão acima é igual a  $-c(t) \cdot \frac{v}{V}$ .

Já no problema 6, vimos que a taxa de variação da quantidade de cloro no instante inicial é igual a  $-105$  g/hora. Logo,  $-\frac{v}{V}c(0) = -105$ . Como  $V = 100 \text{ m}^3$  e  $c(0) = 1000 \text{ g}$ , temos  $-\frac{v}{100} \cdot 1000 = -105$  e, portanto,  $v = \frac{100 \times 105}{1000} = 10,5 \text{ m}^3/\text{hora}$ .

**12.** a) No instante 0, é ingerida uma quantidade  $q$ . Imediatamente antes do instante  $h$ , a quantidade se reduz a  $q/2$ . Então, ingerida uma nova quantidade igual a  $q$ , elevando a quantidade de droga para  $\frac{q}{2} + q = \frac{3q}{2}$ . Ao longo do próximo período de duração  $h$ , a quantidade de droga decai segundo a lei  $q(t) = \frac{3q}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ , onde  $t$  é o tempo decorrido a partir do instante  $h$ . Logo, a quantidade de droga existente no instante  $\frac{3h}{2} = h + \frac{h}{2}$  é  $\frac{3q}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h/2}{h}} = \frac{3q}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$ .

b) Basta analisar o que ocorre imediatamente depois da ingestão de cada dose da droga. Entre estes instantes a quantidade de droga decai à metade de seu valor segundo uma função do tipo exponencial.

## 154 Temas e Problemas

Seja  $q(n)$  a quantidade de droga imediatamente após o instante  $nh$ . Temos  $q(0) = q$  e  $q(n+1) = q(n) \cdot \frac{1}{2} + q$ , para todo  $q$  (observe que, entre os instantes  $nh$  e  $(n+1)h$  a quantidade de droga se reduz à metade, mas é acrescida de uma nova dose igual a  $q$ ).

Assim:

$$q(1) = q \cdot \frac{1}{2} + q$$

$$q(2) = \left(q \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + q = q \cdot \frac{1}{4} + q \cdot \frac{1}{2} + q$$

etc.

É simples provar, por indução, que

$$q(n) = q \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + 1 \right) = q \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2q \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right].$$

O valor limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , da quantidade  $q(n)$  de droga no organismo logo após sua injeção é, portanto igual a  $2q$ .

O gráfico da Figura 56 mostra o comportamento da quantidade de droga ao longo do tempo.

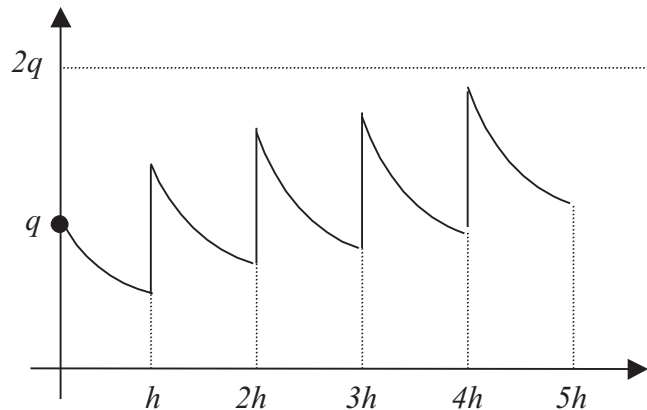


Figura 56